

## LE JEU DE CAMILLE ET MADELEINE

Ce jeu fut inventé par Gustave Choquet. La version simple pratiquée par Camille et Madeleine donne l'occasion de réviser quelques notions de bases.

S'étant donné un espace métrique  $(E, d)$  et l'ensemble  $\mathcal{O}$  des ouverts *non vides* de cet espace, Camille et Madeleine jouent. La partie se déroule comme suit. Au premier échange, Camille commence en choisissant un ouvert  $U_1 \in \mathcal{O}$ , puis Madeleine choisit un ouvert  $V_1 \in \mathcal{O}$  inclus dans  $U_1$ . Au second échange, Camille choisit un ouvert  $U_2 \in \mathcal{O}$  inclus dans  $V_1$ , puis Madeleine choisit un ouvert  $V_2 \in \mathcal{O}$  inclus dans  $U_2$ . Ainsi de suite. Camille choisit une suite  $(U_n)_{n \geq 1}$  et Madeleine une suite  $(V_n)_{n \geq 1}$  qui vérifient

$$U_n \in \mathcal{O}, \quad V_n \in \mathcal{O}, \quad U_{n+1} \subset V_n \subset U_n.$$

- (1) Montrer que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n.$$

On note  $R$  cet ensemble appelé ensemble résultat. Camille gagne si  $R = \emptyset$  et Madeleine gagne si  $R \neq \emptyset$ .

- (2) Dans cette question on suppose que  $E$  est complet. Soient  $x_n$  une suite dans  $E$  et  $r_n$  une suite de réels strictement positifs convergeant vers zéro.
- (a) On suppose que  $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n)$ . Montrer que la suite  $x_n$  est convergente.
  - (b) On suppose que  $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n)$ . Montrer que la limite de la suite  $x_n$  appartient à  $\bigcap_n B(x_n, r_n)$ .
  - (c) Montrer que Madeleine peut gagner chaque partie quelque soit la façon de jouer de Camille.
- (3) Dans cette question on suppose qu'il existe  $U \in \mathcal{O}$  et une suite de fermés  $F_n$  d'intérieur vide telle que

$$U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

- (a) Montrer que si  $V \in \mathcal{O}$ , alors  $V \setminus F_n \in \mathcal{O}$ .
  - (b) Soit une suite  $V_n$  d'ouverts inclus dans  $U$ . Montrer que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (V_n \setminus F_n) = \emptyset$ .
  - (c) Montrer que Camille peut gagner chaque partie quelque soit la façon de jouer de Madeleine.
- (4) Dédurre du divertissement de Camille et Madeleine une démonstration ludique du théorème de Baire.