Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1997-1998

Alain Bachelot

L'effet Hawking

Séminaire É. D. P. (1997-1998), Exposé n° IV, 9 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1997-1998____A4_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

L'EFFET HAWKING

ALAIN BACHELOT

I. introduction

En 1975, dans un article historique, S. Hawking annonça qu'un trou noir ne l'est pas : il émet un flux thermal de particules, de température inversement proportionnelle à sa masse. Ce résultat surprit considérablement car la mécanique relativiste classique interdit un tel phénomène : les géodésiques dirigées vers le futur, rentrent éventuellement dans le trou noir mais n'en ressortent jamais. Du point de vue quantique, la théorie des champs pour un trou noir éternel, qui est un espace-temps stationnaire, invariant par translation en temps de Schwarzschild, n'offre pas d'explication, à moins d'imposer une condition *ad hoc* sur l'horizon passé [12], [11]. Le noeud de l'affaire réside dans le fait que S. Hawking traite d'un trou noir créé par l'effondrement gravitationnel d'une étoile. Dans ce cas, les champs quantiques sont définis sur une variété à bord mouvant, la frontière de l'étoile, et c'est l'instationnarité de la géométrie qui polarise le vide quantique par brisure d'invariance temporelle. Le point crucial de la théorie des champs en relativité générale est que les notions de "vide" et de "particules" ne sont pas absolues, mais relatives à un observateur donné. Nous avons prouvé dans [5] qu'un voyageur franchissant l'horizon futur du trou noir constate effectivement l'existence de la radiation Hawking à l'horizon. Nous traitons ici du cas important d'un observateur immobile à l'extérieur du trou noir, en montrant qu'un tel observateur constate aussi la même polarisation du vide quantique, qui est donc un phénomène global. Les démonstrations détaillées sont à paraître dans [6].

II. Le problème quantique

On considère l'équation de Klein-Gordon de masse $m \geq 0$, dans l'espace-temps extérieur à une étoile sphérique de masse $M > 0$, s'effondrant en un trou noir futur :

$$\partial_t^2 \psi + \mathbb{H}_t \psi = 0, \ t \in \mathbb{R}, \tag{II.1}$$

où $\mathbb{H}_t$ est l'opérateur autoadjoint sur l'espace $L_t^2 = L^2(]z(t), \infty[_{r_*} \times S_\omega^2, r^2 dr_* d\omega)$:

$$\mathbb{H}_t = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r_*} r^2 \frac{\partial}{\partial r_*} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(-\frac{\Delta_{S^2}}{r^2} + m^2\right), \ r_* = r + 2M \ln(r - 2M) \tag{II.2}$$

de domaine dense

$$D(\mathbb{H}_t) = \{f \in L_t^2, \ \mathbb{H}_t f \in L_t^2 \ , \ f(r_* = z(t), \omega) = 0\}, \tag{II.3}$$

et le rayon $z(t)$ de l'étoile au temps t de Schwarzschild satisfait :

$$z \in C^2(\mathbb{R}), \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \ z(t) < -t, \ \ -1 < \dot{z}(t) \leq 0, \ \ t \leq 0 \Rightarrow z(t) = z(0) < 0, \tag{II.4}$$

$$z(t) = -t - Ae^{-t/2M} + \zeta(t), \ A > 0, \ \zeta(t), \dot{\zeta}(t) = O(e^{-t/M}), \ t \to +\infty. \tag{II.5}$$

La solution du problème mixte hyperbolique associé à (II.1) est donnée par un propagateur $U(t, s)$:

$$(\psi(t), \partial_t \psi(t)) = U(t, s)(\psi(s), \partial_t \psi(s)).$$

Pour construire le cadre fonctionnel adapté, on note $[D(\mathbb{K})]$ la fermeture du domaine $D(\mathbb{K})$ d'un opérateur auto-adjoint $\mathbb{K}$ sur un espace de Hilbert H pour la norme $\| \mathbb{K}(\cdot) \|_H$. On introduit les espaces de Hilbert des données d'énergie finie

$$\mathcal{H}(t) = [D(\mathbb{H}_t^{\frac{1}{2}})] \times L_t^2. \tag{II.6}$$

L'existence des champs classique est assurée par la

.

Proposition II.1. *$U(t,s)$ est un propagateur fortement continu de $\mathcal{H}(s)$ sur $\mathcal{H}(t)$ qui vérifie :*

$$s \leq t \Rightarrow \| U(t,s) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(s),\mathcal{H}(t))} = 1, \tag{II.7}$$

$$s > t, z(s) < z(t) \Rightarrow \| U(t,s) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(s),\mathcal{H}(t))} > 1, \tag{II.8}$$

$$\Phi \in \mathcal{H}(0) \quad \| U(t,0)\Phi \|_{\mathcal{H}(t)} \to 0 \Leftrightarrow \Phi = 0, \tag{II.9}$$

$$s > t \Rightarrow \| U(t,s) \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(s),\mathcal{H}(t))} \geq C_t e^{\kappa s}. \tag{II.10}$$

Ce propagateur n'est pas unitaire : on s'attend donc au niveau quantique à une création par paires de particules et d'anti-particules. (II.7) montre la dispersion du champ au cours du temps; néanmoins la condition au bord n'est pas absorbante, et d'après (II.9), il n'existe pas de solution évanescente comme il arrive pour les problèmes hyperboliques dissipatifs. La contraction de l'étoile induit un effet Doppler (II.8), et l'effondrement en un trou noir rend cet effet asymptotiquement infini (II.10). Ce fait crucial, qui est à l'origine de la nature thermale de la radiation Hawking, rend insuffisant le cadre fonctionnel des espaces d'énergie classiques. L'effet Doppler infini permet en effet l'apparition de singularité dans la direction $\partial_t + \partial_{r_*}$ se déplaçant le long de la sous-variété caractéristique

$$\gamma = \{(s, r_* = -s, \omega);\ (s,\omega) \in \mathbb{R} \times S^2\}.$$

On introduit donc un nouvel espace de distributions conormales associées aux champs de vecteurs

$$| t + r_* |^{\frac{1}{2}} \ (\partial_{r_*} + \partial_t),\ \partial_{r_*} - \partial_t,\ \nabla_{S^2_\omega},$$

en définissant l'espace $\mathcal{H}_1(t)$ comme le complété de $C_0^\infty(]z(t),\infty[_{r_*} \times S^2_\omega) \times C_0^\infty(]z(t),\infty[_{r_*} \times S^2_\omega)$ pour la norme

$$\begin{aligned}
&\| {}^t(f,p) \|^2_{\mathcal{H}_1(t)} \\
&= \frac{1}{2}\int_{z(t)}^{-t}\int_{S^2} | r_* + t || \partial_{r_*} f(r_*,\omega) + p(r_*,\omega) |^2 + | \partial_{r_*} f(r_*,\omega) - p(r_*,\omega) |^2 \\
&+ 2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\frac{1}{r^2} | \nabla_{S^2_\omega} f(r_*,\omega) |^2 + m^2 | f(r_*,\omega) |^2\right] r^2 dr_*\, d\omega \\
&+ \int_{-t}^{\infty}\int_{S^2} | \partial_{r_*} f(r_*,\omega) |^2 + | p(r_*,\omega) |^2 \\
&+ \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\frac{1}{r^2} | \nabla_{S^2_\omega} f(r_*,\omega) |^2 + m^2 | f(r_*,\omega) |^2\right] r^2 dr_*\, d\omega.
\end{aligned} \tag{II.11}$$

La propriété essentielle est que le propagateur est uniformément borné sur $\mathcal{H}_1(t)$ pour chaque harmonique sphérique : pour $l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $| m | \leq l$, on note $\Pi_{l,m}$ le projecteur orthogonal de $L^1_{loc}(\mathbb{R}_{r_*} \times S^2_\omega)$ sur $L^1_{loc}(\mathbb{R}_{r_*}) \otimes Y_{l,m}$ défini par

$$\varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_{r_*} \times S_2^\omega),\ \ (\Pi_{l,m}\varphi)(r_*,\omega) = < \varphi(r_*,.), Y_{l,m} >_{L^2(S^2)} \otimes Y_{l,m}(\omega),$$

où $\{Y_{l,m},\ l \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{Z},\ | m | \leq l\}$ est la base d'harmoniques sphériques de $L^2(S^2)$. L'estimation fondamentale est la suivante :

Proposition II.2. *Pour tout $l \in \mathbb{N}$ il existe $C_l > 0$ tel que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $-l \leq m \leq l$, on a*

$$\sup_{0 \leq t,s} \| U(t,s)\Pi_{l,m} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1(s),\mathcal{H}_1(t))} \leq C_l < \infty. \tag{II.12}$$

L'étude des champs quantiques fait intervenir un troisième espace associé au générateur du propagateur :

$$\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(t) = [D(\mathbb{H}_t^{\frac{1}{4}})] \times [D(\mathbb{H}_t^{-\frac{1}{4}})]. \tag{II.13}$$

Les relations entre ces espaces sont décrites par la

Proposition II.3. *En notant $\mathcal{E}'$ l'espace des distributions à support compact dans $\mathbb{R}_{r_*} \times S^2$, on a :*

$$\mathcal{H}(t) \cap \mathcal{E}' \subset \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(t), \tag{II.14}$$

$$0 < m \Rightarrow \mathcal{H}(t) \subset \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(t), \tag{II.15}$$

$$\mathcal{H}_1(t)\cap\mathcal{E}'\not\subset\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(t). \tag{II.16}$$

Le problème quantique va se ramener à évaluer $\lim_{T\to\infty}\parallel U(0,T)\Phi\parallel_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)}$. Compte tenu de (II.10) et (II.16), l'estimation (II.12) n'implique pas directement que cette norme $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)$ soit bornée, et l'existence de cette limite n'est nullement évidente.

Nous maintenant rappelons les concepts de base de la théorie quantique des champs. (voir par exemple [10], [15], [9]). Dans l'approche algébrique, l'ensemble des quantités observables est modélisé par une $\mathbb{C}^*$-algèbre, $\mathfrak{A}$, et létat quantique est défini par une forme linéaire positive, normalisée, ω, sur $\mathfrak{A}$. Pour construire ces objets on considère une famille à un paramètre d'espaces vectoriels réels, $(\mathcal{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$, munis d'une forme symplectique $\sigma_t(.,.)$, et un propagateur $U(t,s)$, qui est un isomorphisme symplectique de $(\mathcal{D}_s,\sigma_s)$ sur $(\mathcal{D}_t,\sigma_t)$.

Une quantification de Weyl de $(\mathcal{D},\sigma,U)$ est une famille d'applications $\mathfrak{W}_t:\ \Phi_t\in\mathcal{D}_t\to\mathfrak{W}_t(\Phi_t)$ de $\mathcal{D}_t$ dans l'espace $\mathfrak{U}(\mathfrak{H})$ des opérateurs unitaires d'un certain espace de Hilbert complexe $\mathfrak{H}$, satisfaisant:

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \forall\Phi_t,\Psi_t\in\mathcal{D}_t,\ \ \mathfrak{W}_t(\Phi_t+\Psi_t)=e^{-\frac{i}{2}\sigma_t(\Phi_t,\Psi_t)}\mathfrak{W}_t(\Phi_t)\mathfrak{W}_t(\Psi_t), \tag{II.17}$$

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \forall\Phi_t\in\mathcal{D}_t,\ \forall X\in\mathfrak{H},\ \ (\lambda\in\mathbb{R}\to[\mathfrak{W}_t(\lambda\Phi_t)](X))\in C^0(\mathbb{R}_\lambda,\mathfrak{H}), \tag{II.18}$$

$$\forall s,t\in\mathbb{R},\ \ \mathfrak{W}_t\circ U(t,s)=\mathfrak{W}_s. \tag{II.19}$$

L'algèbre des observables quantiques $\mathfrak{A}$, est la $\mathbb{C}^*$-sous-algèbre de l'espace $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ des endomorphismes bornés de $\mathfrak{H}$, engendrée par tous les opérateurs $\mathfrak{W}_t(\Phi_t)$. En fait, à un isomorphisme invariant la norme et l'involution, $\mathfrak{A}$ ne dépend ni de t, ni du choix de la quantification de Weyl.

Un état quantique ω sur $\mathfrak{A}$ est caractérisé au temps t par sa fonctionnelle génératrice E_t^ω définie sur $\mathcal{D}_t$ par :

$$\Phi_t\in\mathcal{D}_t\mapsto E_t^\omega(\Phi_t)=\omega(\mathfrak{W}_t(\Phi_t)).$$

A cause de (II.19) ces fonctionnelles vérifient :

$$\forall s,t\in\mathbb{R},\ \ E_t^\omega\circ U(t,s)=E_s^\omega. \tag{II.20}$$

Etant donné un état quantique ω défini au temps initial par E_0^ω, le problème fondamental consiste à décrire cet état au temps t. Grace à (II.20), ce problème quantique se ramène à l'étude du propagateur classique $U(0,t)$.

Nous appliquons ces considérations à l'équation d'évolution du second ordre :

$$\frac{d^2}{dt^2}\psi+\mathbb{A}_t\psi=0,$$

où pour tout réel t fixé, $\mathbb{A}_t$ est un opérateur auto-adjoint de domaine dense sur un certain espace de Hilbert $L^2(\mathcal{M}_t)$. Nous supposons que grace à des hypothèses convenables de dépendance par rapport au temps de $\mathbb{A}_t$, le propagateur $U(t,s)$ associé à cette équation existe et définit un isomorphisme sur une famille $\mathcal{D}_t$ d'espaces vectoriels de données de Cauchy réelles, vérifiant :

$$\mathcal{D}_t\subset\left[D(\mathbb{A}_t^{\frac{1}{4}})\right]\times\left[D(\mathbb{A}_t^{-\frac{1}{4}})\right].$$

La quantification de Fock est définie pour $\Phi_t={}^t(f_t,p_t)\in\mathcal{D}_t$ par :

$$\sigma_t(\Phi_t,\Psi_t)=2\Im<\mathbb{K}_t\Phi_t,\mathbb{K}_t\Psi_t>_{L^2(\mathcal{M}_t)}, \tag{II.21}$$

$$\Phi_0\in\mathcal{D}_0\mapsto\mathfrak{W}_0(\Phi_0)=\exp\left[a^*(\mathbb{K}_0\Phi_0)-(a^*(\mathbb{K}_0\Phi_0))^*\right]\in\mathfrak{U}(\mathfrak{H}), \tag{II.22}$$

$$\mathbb{K}_t\Phi_t=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbb{A}_t^{\frac{1}{4}}f_t+i\mathbb{A}_t^{-\frac{1}{4}}p_t\right), \tag{II.23}$$

où $a^*(h_0)$ est l'opérateur de création usuel sur l'espace de Fock

$$\mathfrak{H}=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\left[L^2_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_0)\right]_s^{\otimes n}. \tag{II.24}$$

Ici $[\mathfrak{h}]_s^{\otimes n}$ désigne le n-ième produit tensoriel symmétrique de $\mathfrak{h}$. L'état vide de Fock au temps t est défini par la fonctionnelle :

$$\Phi_t \in \mathcal{D}_t \mapsto E_t^0(\Phi_t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \parallel \Phi_t \parallel^2_{[D(\mathbb{A}_t^{\frac{1}{4}})]\times[D(\mathbb{A}_t^{-\frac{1}{4}})]}\right), \tag{II.25}$$

et un état thermal de température $\theta > 0$ au temps t, est défini par la fonctionnelle :

$$\Phi_t \in \mathcal{D}_t \mapsto E_t^\theta(\Phi_t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \parallel \sqrt{\coth\left(\frac{1}{2\theta}\mathbb{A}_t^{\frac{1}{2}}\right)}\Phi_t \parallel^2_{[D(\mathbb{A}_t^{\frac{1}{4}})]\times[D(\mathbb{A}_t^{-\frac{1}{4}})]}\right). \tag{II.26}$$

Les concepts précédents nous permettent de définir la quantification de Fock d'un champ de spin nul, en dehors d'une étoile en effondrement gravitationnel, décrit par (II.2), (II.3), en choisissant $\mathbb{A}_t = \mathbb{H}_t$ et en posant :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_t = \Bigg\{\Re\left(\sum_{finie}\begin{pmatrix} f_{l,m}(r_*) \\ p_{l,m}(r_*)\end{pmatrix}\otimes Y_{l,m}(\omega)\right);\ (f_{l,m},p_{l,m}) \in C_0^2 \times C_0^1([z(t),\infty[),\\ f_{l,m}(z(t)) = p_{l,m}(z(t)) + \dot z(t) f'_{l,m}(z(t)) = 0\Bigg\}.\end{aligned} \tag{II.27}$$

De façon analogue, on peut quantifier les champs à l'horizon futur du trou noir, et à l'espace-temps asymptotique de Minkowski en prenant $\mathbb{A}_t$ égal aux hamiltonniens $\mathbb{H}_{BH}$ ou $\mathbb{H}_\infty$ introduits dans la quatrième partie.

Nous pouvons à présent formuler le problème quantique. Puisque l'étoile est stationnaire dans le passé, nous définissons l'état quantique fondamental ω_0 par le vide de Fock dans le passé, i.e.:

$$E_0^{\omega_0} = E_0^0. \tag{II.28}$$

On s'intéresse à la mesure de l'état fondamental à l'infini futur du temps propre d'un observateur au repos en coordonnées de Schwarzschild. Un détecteur de particule étant modélisé par un observable $\mathfrak{W}_t(\Phi)$, la discussion précédente montre que l'état quantique "à la fin" de l'effondrement gravitationnel est déterminé par :

$$\lim_{T\to\infty} \parallel U(0,T)\Phi \parallel_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)}. \tag{II.29}$$

Le résultat va mettre en évidence l'apparition d'un flux thermal rayonnant du trou noir vers l'infini. C'est l'effet Hawking. Pour éclairer l'origine de cette émission de particules, nous étudions tout d'abord un cas simple qui va révéler le mécanisme en cause.

III. Un modèle jouet

On considère le problème

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0,\ \ t\in\mathbb{R},\ \ z(t) < x,$$
$$u(t, x = z(t)) = 0,$$

où la fonction z satisfait (II.5). Ce modèle très simple est physiquement pertinent : Il décrit la dynamique de la composante radiale du premier mode du tenseur électromagnétique à l'extérieur d'une étoile s'effondrant en un trou noir [1]. On note $U_*(t,s)$ le propagateur associé à ce problème mixte hyperbolique et on introduit les opérateurs :

$$\mathbb{H}_{\leftarrow/\rightarrow} = -\frac{d^2}{dx^2}$$

de domaines

$$D(\mathbb{H}_\rightarrow) = \{u\in L^2([-A,\infty[);\ u" \in L^2([-A,\infty[),\ u(-A)=0\},$$
$$D(\mathbb{H}_\leftarrow) = \{u \in L^2(\mathbb{R});\ u" \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Etant donné :

$$\Phi_* \in \mathcal{D}_* = \left\{{}^t(f,p);\ f,p\in C_0^\infty(]-A,\infty[),\ \int p = 0\right\},$$

nous étudions :

$$\lim_{T\to\infty} \parallel U_*(0,T)\Phi_* \parallel_{[D(\mathbb{H}_\rightarrow^{\frac{1}{4}})]\times[D(\mathbb{H}_\rightarrow^{-\frac{1}{4}})]}.$$

Tout d'abord il existe un unique couple de fonctions $f_{\leftarrow}, f_{\rightarrow} \in C_0^\infty(]-A,\infty[)$ tel que :

$$\Phi_* = {}^t(f_{\leftarrow}, -f'_{\leftarrow}) + {}^t(f_{\rightarrow}, f'_{\rightarrow}) \equiv \Omega^-_{\leftarrow}\Phi_* + \Omega^-_{\rightarrow}\Phi_*.$$

$\Omega^-_{\leftarrow}$ et $\Omega^-_{\rightarrow}$ sont des "opérateurs d'ondes" permettant de décomposer le champ en une partie se déplaçant vers l'infini dans le futur ($\Omega^-_{\leftarrow}\Phi_*$), et une partie "tombant dans le trou noir" dans le futur ($\Omega^-_{\rightarrow}\Phi_*$). En particulier, nous avons pour $T > 0$ et $\varepsilon \geq 0$:

$$\left(U_*(0,T)\Omega^-_{\rightarrow}\Phi_*\right)(x) = \left(\Omega^-_{\rightarrow}\Phi_*\right)(x - T),$$

$$\| U_*(0,T)\Omega^-_{\rightarrow}\Phi_* \|_{[D(\mathbb{H}_{\rightarrow}^{\frac{1}{4}+\varepsilon})]\times[D(\mathbb{H}_{\rightarrow}^{-\frac{1}{4}+\varepsilon})]} \xrightarrow[T\to+\infty]{} \| \Omega^-_{\rightarrow}\Phi_* \|_{[D(\mathbb{H}_{\rightarrow}^{\frac{1}{4}+\varepsilon})]\times[D(\mathbb{H}_{\rightarrow}^{-\frac{1}{4}+\varepsilon})]}. \tag{III.1}$$

D'autre part on vérifie aisément par la méthode des caractéristiques (voir [4]), que pour $T > 0$ suffisamment grand :

$$U_*(0,T)\Omega^-_{\leftarrow}\Phi_* = {}^t(f_T, f'_T),$$

$$f_T(x) = -f_{\leftarrow}(T + x - 2\tau(x)),$$

où $\tau(x)$ est définie par l'équation implicite :

$$z(\tau(x)) = x - \tau(x), \quad z(0) \leq x < 0.$$

Afin de résoudre explicitement cette équation, nous spécifions la fonction $z(t)$ pour t assez grand, en choisissant :

$$z(t) = -t - Ae^{-2\kappa t} + Ae^{-2\kappa t}\varphi\left(Ae^{-2\kappa t}\right), \quad 0 < A, \quad 0 < \kappa,$$

où $\varphi(x)$ est la solution locale de :

$$\frac{\ln(1-\varphi(x))}{1-\varphi(x)} = -\kappa x, \quad \varphi(0) = 0.$$

On obtient alors :

$$f_T(x) = -f_{\leftarrow}\left(T + \frac{1}{\kappa}\ln(-x) - \frac{1}{\kappa}\ln(A)\right).$$

Un calcul par transformée de Fourier et théorème des résidus conduit à l'estimation fondamentale :

$$\| U_*(0,T)\Omega^-_{\leftarrow}\Phi_* \|_{[D(\mathbb{H}_{\rightarrow}^{\frac{1}{4}})]\times[D(\mathbb{H}_{\rightarrow}^{-\frac{1}{4}})]} = \| \sqrt{\coth\left(\frac{\pi}{\kappa}\mathbb{H}_{\leftarrow}^{\frac{1}{2}}\right)}\Omega^-_{\leftarrow}\Phi_* \|_{[D(\mathbb{H}_{\leftarrow}^{\frac{1}{4}})]\times[D(\mathbb{H}_{\leftarrow}^{-\frac{1}{4}})]}. \tag{III.2}$$

On a également :

$$0 < \varepsilon \Rightarrow \| U_*(0,T)\Omega^-_{\leftarrow}\Phi_* \|_{[D(\mathbb{H}_{\rightarrow}^{\frac{1}{4}-\varepsilon})]\times[D(\mathbb{H}_{\rightarrow}^{-\frac{1}{4}-\varepsilon})]} \xrightarrow[T\to+\infty]{} 0. \tag{III.3}$$

On conclut immédiatement de (III.1), (III.2) et (III.3) que :

$$\lim_{T\to\infty} \| U_*(0,T)\Phi_* \|^2_{[D(\mathbb{H}_{\rightarrow}^{\frac{1}{4}})]\times[D(\mathbb{H}_{\rightarrow}^{-\frac{1}{4}})]} = \| \sqrt{\coth\left(\frac{\pi}{\kappa}\mathbb{H}_{\leftarrow}^{\frac{1}{2}}\right)}\Omega^-_{\leftarrow}\Phi_* \|^2_{[D(\mathbb{H}_{\leftarrow}^{\frac{1}{4}})]\times[D(\mathbb{H}_{\leftarrow}^{-\frac{1}{4}})]} + \| \Omega^-_{\rightarrow}\Phi_* \|^2_{[D(\mathbb{H}_{\rightarrow}^{\frac{1}{4}})]\times[D(\mathbb{H}_{\rightarrow}^{-\frac{1}{4}})]}.$$

L'effet Hawking est exprimé par le second terme qui est caractéristique d'une émission thermale à température $\frac{\kappa}{2\pi}$ de particules se mouvant vers l'infini dans le futur.

Dans le cas de l'équation de Klein-Gordon en dehors d'une étoile en effondrement, la situation est beaucoup plus compliquée du fait de la courbure spatiale, de la masse du champ, et de la perturbation $\zeta(t)$ dans la fonction $z(t)$. Mais l'origine de la radiation Hawking est esssentiellement la même et par beaucoup d'étapes techniques délicates, de type "scattering", le problème est réduit au cas précédent. Le résultat fait intervenir les opérateurs d'onde de la diffusion par un trou noir éternel.

IV. Diffusion par un trou noir éternel

On considère l'équation de Klein-Gordon sur la variété de Schwarzschild,

$$\partial_t^2\psi + \mathbb{H}_{\mathcal{S}}\psi = 0,$$

$$\mathbb{H}_t = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r_*}r^2\frac{\partial}{\partial r_*} + \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(-\frac{\Delta_{S^2}}{r^2}+m^2\right),\ r_* = r+2M\ln(r-2M),$$

$$D(\mathbb{H}_{\mathcal{S}}) = \{f\in L^2_{\mathcal{S}},\ \mathbb{H}_{\mathcal{S}}f\in L^2_{\mathcal{S}}\},\ \ L^2_{\mathcal{S}} = L^2(\mathbb{R}_{r_*}\times S^2_\omega, r^2dr_*d\omega).$$

Le problème de Cauchy est résolu par un groupe unitaire $U_{\mathcal{S}}(t)$ sur les espaces de Hilbert

$$\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \left[D(\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^{\frac{1}{2}})\right]\times L^2_{\mathcal{S}},\quad \mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{\frac{1}{2}} = \left[D(\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^{\frac{1}{4}})\right]\times\left[D(\mathbb{H}_{\mathcal{S}}^{-\frac{1}{4}})\right].$$

Nous utiliserons le sous espace dense :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}} = \left\{\mathbb{H}_{\mathcal{S}}\sum_{finie}(f_{l,m}(r_*),p_{l,m}(r_*))\otimes Y_{l,m}(\omega),\ \ f_{l,m},p_{l,m}\in C_0^\infty(\mathbb{R})\right\},$$

où $Y_{l,m}$ désignent les harmoniques sphériques.

La dynamique asymptotiquement libre aux horizons du trou noir est déterminée par l'équation:

$$\partial_t^2\Psi + \mathbb{H}_{BH}\Psi = 0,$$

$$\mathbb{H}_{BH} = -\frac{\partial^2}{\partial r_*^2},\ D(\mathbb{H}_{BH}) = \left\{f\in L^2_{BH};\ \partial^2_{r_*}f\in L^2_{BH}\right\},\ \ L^2_{BH} = L^2(\mathbb{R}_{r_*}\times S^2_\omega, 4M^2dr_*d\omega).$$

Le problème de Cauchy associé est résolu par un groupe unitaire $U_{BH}(t)$ sur les espaces

$$\mathcal{H}_\pm = \left\{{}^t(f,\pm\partial_{r_*}f);\ \ f\in\left[D(\mathbb{H}_{BH}^{\frac{1}{2}})\right]\right\},\ \ \mathcal{H}_\pm^{\frac{1}{2}} = \left\{{}^t(f,\pm\partial_{r_*}f);\ \ f\in\left[D(\mathbb{H}_{BH}^{\frac{1}{4}})\right]\right\}.$$

On choisit une fonction de troncature $\chi(r_*)$ telle que :

$$\chi\in C^\infty(\mathbb{R}),\ \exists a,b;\ 0<a<b<1;\ r_*<a\Rightarrow\chi(r_*)=1,\ b<r_*\Rightarrow\chi(r_*)=0, \tag{IV.1}$$

et on introduit les *opérateurs d'ondes d'horizon*

$$\Omega^\pm_{BH}\Phi = \lim_{t\to\pm\infty}U_{BH}(-t)\chi U_{\mathcal{S}}(t)\Phi\ \ dans\ \ \left[D(\mathbb{H}_{BH}^{\frac{1}{2}})\right]\times L^2_{BH}. \tag{IV.2}$$

Sur l'espace de Minkowski asymptote à l'infini spatial, les solutions de l'équation de Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_\infty + \mathbb{H}_\infty\psi_\infty = 0,\ dans\ \mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^3_x,$$

$$\mathbb{H}_\infty = -\Delta_{\mathbb{R}^3_x}+m^2,\ \ D(\mathbb{H}_\infty) = \left\{f\in L^2(\mathbb{R}^3_x,dx);\ -\Delta_{\mathbb{R}^3_x}f\in L^2(\mathbb{R}^3_x,dx)\right\},$$

sont données par le propagateur libre $U_\infty(t)$ qui est un groupe unitaire sur les espaces

$$\mathcal{H}_\infty = \left[D(\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}})\right]\times L^2(\mathbb{R}^3),\ \ \mathcal{H}_\infty^{\frac{1}{2}} = \left[D(\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{4}})\right]\times\left[D(\mathbb{H}_\infty^{-\frac{1}{4}})\right].$$

A cause de la longue portée de l'interaction gravitationnelle on doit utiliser le propagateur modifié à la Dollard, qui est unitaire sur $\mathcal{H}_\infty$ et $\mathcal{H}_\infty^{\frac{1}{2}}$:

$$U^D_\infty(t) = \begin{bmatrix}\cos\left(t\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}}+\ln(t)\mathbb{D}_\infty\right) & \mathbb{H}_\infty^{-\frac{1}{2}}\sin\left(t\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}}+\ln(t)\mathbb{D}_\infty\right)\\ -\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}}\sin\left(t\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}}+\ln(t)\mathbb{D}_\infty\right) & \cos\left(t\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}}+\ln(t)\mathbb{D}_\infty\right)\end{bmatrix}.$$

Pour $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3_x)$ et $t\in\mathbb{R}^*$ on a posé:

$$\left(\mathbb{D}_\infty f\right)(x) = -\frac{Mm^2}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}e^{ix.\xi}\mid\xi\mid^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}^3}e^{-iy.\xi}f(y)dy\right)d\xi,\ \ \ln(t) = \frac{t}{\mid t\mid}\ln\mid t\mid.$$

Identifiant $\mid x\mid = r_*$, on définit les *opérateurs d'onde à l'infini* :

$$\Omega^\pm_\infty\Phi = \lim_{t\to\pm\infty}U^D_\infty(-t)(1-\chi)U_{\mathcal{S}}(t)\Phi\ \ dans\ \ \mathcal{H}_\infty. \tag{IV.3}$$

Théorème IV.1. *Les limites (IV.2) et (IV.3) existent pour tout* Φ *dans* $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$*, et ne dépendent pas de la fonction* χ *satisfaisant (IV.1). De plus* $\Omega^{\pm}_{BH} \oplus \Omega^{\pm}_{\infty}$ *est une isométrie de* $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ *sur* $\mathcal{H}_{\pm} \oplus \mathcal{H}_{\infty}$ *qui s'étend en une isométrie de* ${\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}^{\frac{1}{2}}$ *sur* $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\pm} \oplus \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\infty}$*. Par ailleurs si* $\Phi \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ *on a :*

$$\sqrt{\coth\left(\frac{\pi}{\kappa}\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}_{BH}\right)}\,\Omega^{\pm}_{BH}\Phi \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{\pm}.$$

La démonstration met en oeuvre dans un nouveau cadre fonctionnel, la machinerie du scattering en métrique de Schwarzschild développée dans [3] et [7].

V. Le problème mixte caractéristique

Pour calculer la limite (II.29), on analyse très précisemment la propagation du champ pour obtenir la structure du propagateur rétrograde $U(0,T)$ dans $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)$ quand $T \to \infty$. L'étude précédente permet d'évaluer la partie du champ loin de l'étoile :

$$(1-\chi)U(0,T)\Phi = (1-\chi)U_{\mathcal{S}}(-T)\Phi \sim (1-\chi)U^{D}_{\infty}(-T)\Omega^{-}_{\infty}\Phi,\ T \to \infty,\ \ dans\ \ \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0).$$

L'évaluation près de l'étoile est beaucoup plus délicate. Etant donné $\Phi \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, il s'agit d'évaluer

$$\| \chi U(0,T)\Phi \|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)},\ T \to \infty.$$

Une estimation grossière donne seulement :

$$\| \chi U(0,T)\Phi \|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)} \leq Ce^{\kappa T}.$$

Une estimation fine de l'injection (II.14) donne pour $\Psi \in \mathcal{D}_0$ et $\alpha > 0$:

$$\| \chi\Psi \|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)} \leq C\left[(1+\mid \ln\alpha \mid)^{\frac{3}{2}} \| \chi\Psi \|_{\mathcal{H}_1(0)} + \| \chi\Psi \|_{\mathcal{H}(0,\alpha)}\right]$$

où nous avons noté :

$$\begin{aligned}
&\| (f,p) \|^2_{\mathcal{H}(0,\alpha)} \\
&\quad = \int_{-\alpha}^{\infty}\int_{S^2} \mid \partial_{r_*} f(r_*,\omega) \mid^2 + \mid p(r_*,\omega) \mid^2 \\
&\quad + \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[\frac{1}{r^2} \mid \nabla_{S^2_\omega} f(r_*,\omega) \mid^2 + m^2 \mid f(r_*,\omega) \mid^2\right] r^2 dr_*\, d\omega.
\end{aligned}$$

L'argument de propagation à vitesse finie nous permet de choisir $\alpha \sim e^{-\kappa T}$ pour que la Proposition II.2 et la conservation de l'énergie nous assurent que :

$$\sup_{0\leq T} \| \chi U(0,T)\Phi \|_{\mathcal{H}_1(0)} + \| \chi U(0,T)\Phi \|_{\mathcal{H}(0,\alpha)} \leq C' \| \Phi \|_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}.$$

Dans cette première étape on obtient ainsi l'estimation :

$$\| \chi U(0,T)\Phi \|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)} \leq C(1+T)^{\frac{3}{2}} \| \Phi \|_{\mathcal{H}_{\mathcal{S}}}. \tag{V.1}$$

On note ensuite que $\chi U(0,T)\Phi$ est déterminé par la trace $\varphi_T(s,\omega)$ de la solution ψ de (II.1) sur la sous variété caractéristique

$$\Gamma = \{(t, r_* = 1-t, \omega);\ (t,\omega) \in \mathbb{R}\times S^2\}.$$

On est ainsi amené à considérer le problème mixte caractéristique associé à (II.1) dans

$$\mathcal{M} = \left\{(t,r_*,\omega) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times S^2;\ \ z(t) < r_* < 1-t\right\}.$$

On introduit l'espace

$$W^1(\Gamma) = \left\{\varphi(t) = \sum_{finie}\varphi_{l,m}(t)\otimes Y_{l,m}(\omega);\ \ \varphi \in H^1(\Gamma),\ \ t > t_\varphi \Rightarrow \varphi(t) = 0\right\},$$

où Γ est paramétrisée naturellement par t. Etant donné φ dans $W^1(\Gamma)$ il existe une unique solution $\psi \in H^1_{loc}(\bar{\mathcal{M}})$ de (II.1) dans $\mathcal{M}$, satisfaisant pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\omega \in S^2$:

$$\psi(t, r_* = z(t), \omega) = 0,$$

$$\psi(t, r_* = 1-t, \omega) = \varphi(t,\omega),$$

$$t > t_\varphi \Rightarrow \psi(t,.,.) = 0.$$

La suite se concentre sur l'analyse de l'opérateur

$$P : \varphi \in W^1(\Gamma) \mapsto P\varphi = (\chi\psi(t=0,.,.), \chi\partial_t\psi(t=0,.,.) \in \mathcal{H}(0) \cap \mathcal{E}'. \tag{V.2}$$

(V.1) entraine que :

$$\| P\varphi \|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)} \leq C \sum_{j=0}^{\infty} (1+j)^{\frac{3}{2}} \left(\int_{j-1}^{j+1} \int_{S^2} \mid \partial_t \varphi \mid^2 + \mid \varphi \mid^2 dt d\omega \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour affiner cette estimation la stratégie consiste à comparer P avec l'opérateur P_{BH} construit de manière analogue en oubliant la courbure spatiale :

$$P_{BH} : \varphi \in W^1(\Gamma) \mapsto P_{BH}\varphi = (\chi\psi_{BH}(t=0,.,.), \chi\partial_t\psi_{BH}(t=0,.,.) \in \mathcal{H}(0) \cap \mathcal{E}', \tag{V.3}$$

où

$$\partial_t^2 \psi_{BH} - \partial_{R_*}^2 \psi_{BH} = 0, \;\; t \in \mathbb{R}, \;\; z(t) < r_*, \;\; \omega \in S^2,$$
$$\psi_{BH}(t, r_* = 1-t, \omega) = \varphi(t,\omega),$$
$$\psi_{BH}(t, r_* = z(t), \omega) = 0,$$
$$t > t_\varphi \Rightarrow \psi_{BH}(t,.,.) = 0.$$

Une analyse soigneuse de la solution montre que :

$$\| P_{BH}\varphi \|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)} \leq C \| \varphi \|_{W^1(\Gamma)}. \tag{V.4}$$

Par ailleurs la décroissance exponentielle de l'interaction gravitationnelle à l'horizon implique :

$$\| P\varphi - P_{BH}\varphi \|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)} \leq C \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\kappa j} \left(\int_{j-1}^{j+1} \int_{S^2} \mid \partial_t \varphi \mid^2 + \mid \varphi \mid^2 dt d\omega \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{V.5}$$

Il en découle l'estimation affinée :

$$\| P\varphi \|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)} \leq C \| \varphi \|_{W^1(\Gamma)}. \tag{V.6}$$

Dans la dernière étape nous faisons glisser la donnée φ le long de Γ en posant pour $T > 0$:

$$\varphi^{[T]}(t,\omega) = \varphi(t-T,\omega).$$

L'étude du modèle jouet montre en fait que :

$$\| P_{BH}\varphi^{[T]} \|^2_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)} \xrightarrow[T\to+\infty]{} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S^2} \mid \xi \mid \coth\left(\frac{\pi}{2\kappa} \mid \xi \mid\right) \mid \hat{\varphi}(\xi,\omega) \mid^2 d\xi d\omega,$$

et (V.5) donne alors le résultat fondamental de l'étude du problème caractéristique :

$$\| P\varphi^{[T]} \|^2_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)} \xrightarrow[T\to+\infty]{} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S^2} \mid \xi \mid \coth\left(\frac{\pi}{2\kappa} \mid \xi \mid\right) \mid \hat{\varphi}(\xi,\omega) \mid^2 d\xi d\omega. \tag{V.7}$$

Pour en déduire l'effet Hawking, on note que la théorie de la diffusion par un trou noir éternel assure que :

$$\| \varphi_T - \varphi_-^{[T]} \|_{W^1(\Gamma)} \xrightarrow[T\to+\infty]{} 0, \tag{V.8}$$

où

$$\varphi_-(t,\omega) = \left[\Omega_{BH}^- \Phi\right]_1 (r_* = 1-2t, \omega).$$

On conclut que

$$\| P\varphi_T \|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)} \xrightarrow[T\to+\infty]{} \| \sqrt{\coth\left(\frac{\pi}{\kappa}\mathbb{H}_{BH}^{\frac{1}{2}}\right)}\, \Omega_{BH}^- \Phi \|_{\mathcal{H}_-^{\frac{1}{2}}}, \tag{V.9}$$

et comme :

$$U(0,T)\Phi = (1-\chi(r_*))U_\infty^D(-T)\Omega_\infty^-\Phi + P\varphi_T + o(1)$$

dans $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)$, et que les termes de droite sont asymptotiquement orthogonaux, on obtient finalement le :

Théorème V.1 (Résultat principal). *Pour tout Φ dans $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ la limite (II.29) existe et :*

$$\lim_{T\to+\infty} \parallel U(0,T)\Phi \parallel^2_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)} = \parallel \Omega^-_\infty \Phi \parallel^2_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_\infty} + \parallel \sqrt{\coth\left(\frac{\pi}{\kappa}\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}_{BH}\right)}\, \Omega^-_{BH}\Phi \parallel^2_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_-} .$$

Selon la théorie quantique des champs, cette limite signifie que l'observateur au repos en coordonnées de Schwarzschild mesure à l'infini de son temps propre, une émission thermale, à la température $\frac{1}{8\pi M}$, indépendante de l'histoire de l'effondrement gravitationnel, de particules sortant du trou noir vers l'infini. C'est le célèbre effet Hawking [14]. L'analyse précédente peut s'étendre aisément à d'autres champs (Dirac [17], Maxwell [1], spin $\frac{3}{2}$ [18]), et aux trous noirs avec constante cosmologique [2]. L'étude de la rétroaction de la radiation Hawking sur la métrique (évaporation quantique du trou noir), ainsi que le cas des champs en interaction [8], [16], posent des problèmes non linéaires redoutables et totalement ouverts.

References

[1] A. Bachelot. Gravitationnal Scattering of Electromagnetic Field by Schwarzschild Black Hole. *Ann. Inst. Henri Poincaré - Physique théorique*, 54(3):261–320, 1991.

[2] A. Bachelot. Scattering of Electromagnetic Field by De Sitter-Schwarzschild Black-Hole. In *Non linear hyperbolic equations and field theory*, volume 253 of *Research Notes in Mathematics*, pages 23–35. Pitman, 1992.

[3] A. Bachelot. Asymptotic Completeness for the Klein-Gordon Equation on the Schwarzschild Metric. *Ann. Inst. Henri Poincaré - Physique théorique*, 61(4):411–441, 1994.

[4] A. Bachelot. Scattering of Scalar Fields by Spherical Gravitational Collapse. *J. Math. Pures Appl.*, 76:155–210, 1997.

[5] A. Bachelot. Quantum Vacuum Polarization at the Black-Hole Horizon. *Ann. Inst. Henri Poincaré - Physique théorique*, 67(2):181–222, 1997.

[6] A. Bachelot. The Hawking Effect. *Ann. Inst. Henri Poincaré - Physique théorique*, à paraître.

[7] A. Bachelot, A. Motet-Bachelot. Les résonances d'un trou noir de Schwarzschild. *Ann. Inst. Henri Poincaré - Physique théorique*, 59(1):3–68, 1993.

[8] A. Bachelot and J-P. Nicolas. Equation non linéaire de Klein-Gordon dans des métriques de type Schwarzschild. *C. R. Acad. Sc. Paris, Série I*, 316:1047–1050, 1993.

[9] O. Bratteli, D. W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II.* Springer Verlag, 1981.

[10] J. Dimock. Algebras of Local Observables on a Manifold. *Commun. Math. Phys.*, 77:219–228, 1980.

[11] J. Dimock, B. S. Kay. Classical and Quantum Scattering Theory for linear Scalar Fields on Schwarzschild Metric II. *J. Math. Phys.*, 27:2520–2525, 1986.

[12] J. Dimock, B. S. Kay. Classical and Quantum Scattering Theory for linear Scalar Fields on Schwarzschild Metric I. *Ann. Phys.*, 175:366–426, 1987.

[13] K. Fredenhagen, R. Haag. On the Derivation of Hawking Radiation Associated with the Formation of a Black Hole. *Comm. Math. Phys.*, 127:273–284, 1990.

[14] S. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Comm. Math. Phys.*, 43:199–220, 1975.

[15] C. J. Isham. Quantum field theory in Curved Space-Times, a general mathematical framework. In *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics II*, volume 676 of *Lecture Notes in Math.*, pages 459–512. Springer Verlag, 1977.

[16] J-P. Nicolas. Non Linear Klein-Gordon Equation on Schwarzschild-like Metrics. *J. Math. Pures Appl.*, 74:35–58, 1995.

[17] J-P. Nicolas. Scattering of linear Dirac fields by a spherically symetric Black-Hole. *Ann. Inst. Henri Poincaré - Physique théorique*, 62(2):145–179, 1995.

[18] J-P. Nicolas. Global Exterior Cauchy Problem for Spin 3/2 Zero Rest-Mass Fields in the Schwarzschild Space-Time. *CPDE*, 22(3-4):465–502, 1997.

[19] G. L. Sewell. Relativity of temperature and the Hawking effect. *Phys. Lett. A*, 79A(1):23–24, 1980.

[20] G. L. Sewell. Quantum Fields on Manifolds : PCT and Gravitationally Induced Thermal States. *Ann. Phys.*, 141:201–224, 1982.

[21] W. G. Unruh. Notes on black-hole evaporation. *Phys. Rev. D*, 14(4):870–892, 1976.

[22] R. Wald. On Particle Creation by Black Holes. *Comm. Math. Phys.*, 45:9–34, 1975.

Université Bordeaux-1, Institut de Mathématiques, Laboratoire CNRS "MAB", F-33405 Talence Cedex

E-mail address: `bachelot@math.u-bordeaux.fr`