DÉCROISSANCE DE L'ÉNERGIE LOCALE D'UNE ONDE DIFFUSÉE PAR UN OBSTACLE INHOMOGÈNE

ALAIN BACHELOT et AGNÈS PUJOLS

Nous établissons la décroissance de l'énergie locale d'une onde acoustique diffusée par un obstacle inhomogène, et démontrons que l'onde est asymptotiquement sortante.

A la suite dex travaux fondateurs de Lax-Phillips sur la diffusion par un obstacle réfléchissant [2], les cas des obstacles homogènes, dissipatifs [3], [4], [5], ou des potentiels [1] ont été étudiés. Ayant en vue des applications à des cas concrets complexes, nous considérons le cas techniquement plus compliqué de la diffusion par un obstacle inhomogène.

Etant donnés un ouvert $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^3;\ |x| < \rho\}$, de frontière Σ, de normale unitaire sortante ν, et un ouvert Ω_0, $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, de frontière Γ, de normale unitaire rentrante n, on considère le problème

$$(1)\qquad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \Omega_2,\ \Omega_2 = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \\ (r(x)\partial_t^2 - \Delta)\, u + \beta(x)\partial_t u = 0 \text{ dans } \mathbb{R}_t^+ \times \Omega_1,\ \Omega_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega}_0, \\ u_1 = u_2 \text{ et } \partial_\nu u_1 = \partial_\nu u_2 \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \Sigma, \\ \mathscr{B}(u, \partial_t u) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_t^+ \times \Gamma, \end{cases}$$

où la condition sur Γ est de type Dirichlet, Neuman, Robin ou impédance

$$\mathscr{B}(u, \partial_t u) = u \text{ ou } \mathscr{B}(u, \partial_t u) = \partial_n u + \alpha(x)\, \partial_t u + \gamma(x) u.$$

On suppose que les fonctions r, β, γ et α, et les frontières Γ et Σ vérifient $r, \beta \in C^0(\overline{\Omega}_1)$, r, β *analytiques* dans Ω_1, $\alpha, \gamma \in C^\infty(\Gamma)$, $0 \leqslant \alpha, \beta, \gamma$ et $0 < r$,

$$\Gamma \textit{ est } C^\infty \textit{ et } \Sigma \textit{ est analytique.}$$

L'obstacle est dit *conservatif* si α et β sont nuls et *dissipatif* dans le cas contraire. Dans le cas *conservatif*, on renforce légèrement l'hypothèse sur r en imposant

$$r \textit{ est analytique sur } \Omega_1 \cup \Sigma.$$

Pour résoudre le problème mixte hyperbolique associé à (1) on pose

$$F(t) = {}^t(u(t), \partial_t u(t)),\ \partial_t F = AF,\ t \geqslant 0,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{r}^{-1}\Delta & -\tilde{r}^{-1}\tilde{\beta} \end{pmatrix},$$

REV. ROUMAINE MATH. PURES APPL., 41 (1996), 7–8, 451–459

où $\widetilde{r}$ et $\widetilde{\beta}$ désignent le prolongement de r et β respectivement par 1 et 0 dans Ω_2. On introduit l'espace de Hilbert H, complété de l'espace $X = \{{}^t(f_1, f_2); f_i \in C_0^\infty(\overline{\Omega}_1 \cup \Omega_2), \mathscr{B}(f_1, f_2) = 0\}$ pour la norme

$$\left\|{}^t(f_1, f_2)\right\|_H^2 = \int_{\overline{\Omega}_1 \cup \Omega_2} (\widetilde{r}(x)\left|f_2(x)\right|^2 + \left|\nabla_x f_1(x)\right|^2) dx + \int_\Gamma \gamma(x)\left|f_1(x)\right|^2 d\Gamma(x),$$

et le sous espace $D(A)$, complété de X pour la norme du graphe de A. On va montrer que A est un opérateur maximal dissipatif, générateur d'un semigroupe de contraction $U(t)$ sur H. Dans le cas conservatif A est anti-autoadjoint et $U(t)$ est un groupe unitaire.

PROPOSITION 1. *Pour toute donnée initiale f dans D(A), il existe une unique solution u de* (1), $u(t,x) = [U(t)f]_1(x)$ *telle que*:

$${}^t(u, \partial_t u) \in C^0(\mathbb{R}_t^+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}_t^+, H),\ {}^t(u(0), \partial_t u(0)) = f.$$

Preuve. Il est facile de voir que l'opérateur A est dissipatif. En effet on a

$$\forall f \in D(A)\quad (Af, f) + (f, Af) = -2\int_\Gamma \alpha\, |f_2|^2 d\Gamma - 2\int_{\Omega_1} \beta\, |f_2|^2 dx \leqslant 0$$

Il reste à montrer que A est maximal dissipatif. Pour cela, il suffit que l'image de A – Id soit H. On va procéder en deux étapes: d'abord prouver que Im $(A$ – Id) est fermé puisque Im $(A$ – Id) est dense dans H.

L'opérateur A étant dissipatif, on a pour tout f dans $D(A)$

$$\|f\|^2 \leqslant \mathrm{Re}((\mathrm{Id}-A)f, f) \leqslant \|(A-\mathrm{Id})f\|^2.$$

Or A est un opérateur fermé donc Im $(A$ – Id) est fermé. On considère maintenant le problème

$$(2)\quad \begin{cases} (A-\mathrm{Id})\Phi = h \\ \partial_n \Phi_1 + \gamma\Phi_1 + \alpha\Phi_2 = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \Phi_{1/\Omega_1} = \Phi_{1/\Omega_2},\ \partial_\nu \Phi_{1/\Omega_1} = \partial_\nu \Phi_{1/\Omega_2} \text{ sur } \Sigma \end{cases}$$

avec $h = (h_1, h_2)$ dans $\mathscr{D}(\overline{\Omega}) \times \mathscr{D}(\overline{\Omega})$. Comme $\mathscr{D}(\overline{\Omega}) \times \mathscr{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans H, l'ensemble Im $(A$ –Id) sera dense dans H s'il existe une solution Φ dans $D(A)$. On est ramené à résoudre le problème

$$\begin{cases} (\Delta - (\widetilde{r} + \widetilde{\beta}))\Phi_1 = (\widetilde{r} + \widetilde{\beta})h_1 + \widetilde{r}h_2 \text{ dans } \Omega \\ \partial_n \Phi_1 + (\gamma + \alpha)\Phi_1 = -\alpha h_1 \text{ sur } \Gamma \\ \Phi_{1/\Omega_1} = \Phi_{1/\Omega_2},\ \partial_\nu \Phi_{1/\Omega_1} = \partial_\nu \Phi_{1/\Omega_2} \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

Soit $l(\varphi) = ((\widetilde{r} + \widetilde{\beta})h_1 + \widetilde{r}h_2, \varphi)_{L^2(\Omega)} - (\alpha h_1, \varphi)_{L^2(\Gamma)}$. On introduit la norme

$$[\varphi]^2 = \int_\Omega (|\nabla\varphi|^2 + (\widetilde{r} + \widetilde{\beta})|\varphi|^2) dx + \int_\Gamma (\alpha + \gamma)|\varphi|^2 d\Gamma$$

et on considère l'espace H_1' fermeture de $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$ pour la norme [.]. La forme linéaire l est continue dans H_1' d'où, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe g dans H_1' tel que

$$l(\varphi) = [g, \varphi] = \int_\Omega (\nabla \varphi \cdot \overline{\nabla \varphi} + (\tilde{r}+\tilde{\beta}) g \overline{\varphi}) \mathrm{d}x + \int_\Gamma (\alpha+\gamma) g \overline{\varphi} \, \mathrm{d}\Gamma .$$

Si on prend φ dans $\mathscr{D}(\Omega)$ alors

$$f = -\Delta g + (\tilde{r}+\tilde{\beta}) g \text{ dans } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Si on choisit maintenant φ dans $\mathscr{D}(\overline{\Omega})$, on obtient au sens des distributions

$$(\alpha+\gamma) g + \partial_n g = -\alpha h_1.$$

On a donc obtenu une solution faible de (2). Puisque $f \in L^2(\Omega)$, on déduit que $\Delta g \in L^2(\Omega)$. Alors on a trouvé une solution de (2) dans $D(A)$. C.Q.F.D.

En utilisant le théorème d'Holmgren et les hypothèses d'analyticité on établit le résultat clef suivant

PROPOSITION 2. *A ne possède pas de valeur propre de type* $\mathrm{i}\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Preuve. Commençons par montrer que 0 n'est pas une valeur propre. Soit f un vecteur du noyau de A, alors sa seconde composante f_2 s'annule tandis que sa première composante f_1 est une fonction harmonique, dont le gradient est dans L^2, et f_1 satisfait, soit une condition aux limites de Dirichlet homogène, soit la condition mixte

$$\partial_n f_1 + \gamma f_1 = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Par ailleurs f_1 étant dans l'espace de Beppo-Levi, elle vérifie

$$(1+|x|)^{-1} f_1 \in L^2(\Omega).$$

et la formule de Green donne

$$0 = -\int_\Omega \nabla f_1 \cdot \nabla \bar{f}_1 \, \mathrm{d}x + \int_\Gamma \partial_n f_1 \cdot \bar{f}_1 \, \mathrm{d}\Gamma(x).$$

La conclusion $f_1 = 0$ est immédiate. Il reste à vérifier maintenant que pour $\sigma \neq 0$, le complexe $\mathrm{i}\sigma$ n'est pas une valeur propre de A. Soit f une fonction de $D(A)$ vérifiant

$$Af = \mathrm{i}\sigma f \tag{3}$$

et soit χ une fonction C^∞ qui s'annule au voisinage de $\Omega_1 \cup K$ et qui vaut 1 pour tout $|x| > \rho$. On pose $g = \chi f$ alors g est défini partout, est d'énergie finie, et satisfait

$$(A_0 - \mathrm{i}\sigma) g = h$$

avec h nulle pour $|x| > \rho$. On sait alors [2] que $g = 0$ pour $|x| > \rho$, donc $f = 0$ pour $|x| > \rho$. Dans l'ouvert Ω_2, la première composante de f est solution de l'équation elliptique

$$(\Delta + \sigma^2) f_1 = 0$$

et d'autre part $f_2 = i\sigma f_1$. Les solutions d'une telle équation sont analytiques dans Ω_2, il s'ensuit que f s'annule dans Ω_2. Dans Ω_1 l'égalité (3) donne

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} (\Delta+\sigma^2 r(x) - i\sigma\beta(x)) f_1 = 0 \text{ dans } \Omega_1 \\ f_2 = i\sigma f_1 \text{ dans } \Omega_1 \end{cases}$$

et puisque $f \in D(A)$, on a aussi les conditions de transmission

$$f_1 = 0,\ \partial_\nu f_1 = 0 \text{ sur } \Sigma.$$

De (3) et de l'analyticité de r et β, on déduit que f est analytique dans Ω_1. On va distinguer deux cas: le cas conservatif ($\beta \equiv 0$, $\alpha \equiv 0$) et le cas dissipatif (α ou $\beta \neq 0$). On commence par le premier de ces cas. Notons

$$P(x, \partial)\, g = \Delta g + \sigma^2\, \tilde{r}(x) 1_{\Omega_1}(x) g \text{ dans } \Omega$$

où 1_{Ω_1} désigne la fonction caractéristique de Ω_1. Soit un point x_0 de la frontière Σ. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0, et une fonction $\tilde{r}_1$ qui soit analytique sur $\mathcal{V}$, et coïncide avec r sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. On pose alors

$$Q(x, \partial) = \Delta + \sigma^2 \tilde{r}_1 \text{ dans } \mathcal{V},$$

et on a

$$Q(x, \partial) = P(x, \partial) \text{ sur } \Omega_1 \cap \mathcal{V}.$$

Puisque $f \in D(A)$, sa première composante f_1 est telle que $Q f_1 \in L^2(\mathcal{V})$. D'autre part, f_1 est nulle dans Ω_2, donc

$$Q f_1 = 0 \text{ sur } \Omega_2 \cap \mathcal{V}.$$

L'équation (4) avec $\beta = 0$ entraîne que

$$Q f_1 = 0 \text{ sur } \Omega_1 \cap \mathcal{V}.$$

D'où Qf_1 est nul sur $\mathcal{V}$ et f_1 est nulle sur $\Omega_2 \cap \mathcal{V}$. Le théorème d'Holmgren assure alors l'existence d'un voisinage de x_0 sur lequel $f_1 = 0$. Par analyticité, on en déduit que f s'annule aussi dans Ω_1.

Pour le cas dissipatif, on multiplie par $\bar{f}_1$ et en intégrant sur Ω_1, une simple formule de Green donne

$$-\int_{\Omega_1} |\nabla f_1|^2 \,dx + \int_\Gamma \partial_n f_1 \cdot \bar{f}_1 \,d\Gamma = \int_{\Omega_1} i\sigma(\beta(x) + i\sigma\, r(x))|f_1|^2 \,dx.$$

Sachant que, sur le bord Γ, on a

$$\partial_n f_1 + \gamma f_1 + i\sigma\, \alpha\, f_1 = 0,$$

en remplaçant $\partial_n f_1$ par $-(\gamma f_1 + i\sigma\, \alpha\, f_1)$ on obtient

$$-\int_{\Omega_1} |\nabla f_1|^2 \,dx + \int_\Gamma (\gamma |f_1|^2 + i\sigma\, \alpha\, |f_1|^2)\,d\Gamma = \int_{\Omega_1} i\sigma(\beta(x) + i\sigma\, r(x))|f_1|^2 \,dx.$$

En prenant les parties réelles et imaginaires de l'équation ci-dessus, on trouve les deux égalités suivantes:

$$\int_{\Omega_1} |\nabla f_1|^2 \,dx + \int_\Gamma \gamma |f_1|^2 \,d\Gamma = \sigma^2 \int_{\Omega_1} |f_1|^2 \,dx,\quad \int_{\Omega_1} \beta(x)|f_1|^2 dx = -\int_\Gamma \alpha |f_1|^2 \,d\Gamma.$$

Les fonctions β et α étant positives, on tire de la deuxième égalité que:

$$\beta(x)\ |f_1|^2 = 0 \text{ dans } \Omega_1,\ \alpha(x)\ |f_1|^2 = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Si β n'est pas identiquement nul, son analyticité entraine que f_1 s'annule sur Ω_1. Si β est nul, et α non identiquement nul, f_1 est nul sur une partie ouverte non vide de Γ, et par la condition aux limites, $\partial_n f_1$ s'annule aussi sur cette partie. Donc f_1 qui est solution de (4), est nul sur un ouvert non vide de Ω_1, et par analyticité s'annule sur tout Ω_1. Dans tous les cas f_1 est nulle dans Ω_1 donc f_2 l'est aussi. C.Q.F.D.

Le résultat principal de cet article exprime le fait que les solutions perturbées $U(t)f$ sont asymptotiquement sortantes. On définit les espaces de données rentrantes (D_-^a) ou sortantes ((D_+^a) par

$$(D_\pm^a)=\{f\in H_0\ /[U_0(t)f](x)=0 \text{ pour } |x|\leqslant \pm\, t+a\},\ a>0,$$

où H_0 est le complété de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)\times\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$ pour la norme

$$\|f\|_0^2=\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla f_1(x)|^2+|f_2(x)|^2)\mathrm{d}x,$$

et $U_0(t)$ l'opérateur unitaire:

$$U_0(t)=\exp(A_0),\ A_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \Delta & 0\end{pmatrix}.$$

Soit P_+^ρ la projection orthogonale sur l'orthogonal de D_+^ρ dans H.

THÉORÈME. *Pour tout f dans H, on a:*

$$\lim_{t\to+\infty} P_+^\rho U(t)f=0.$$

Preuve. On commence par montrer que

(5) $$\forall f\in H,\ \forall R\geqslant\rho \qquad \liminf_{t\to+\infty}\|U(t)f\|_R=0,$$

où

$$\|f\|_R^2=\int_{B(0,R)\setminus\Omega_0}(|\nabla f_1(x)|^2+\tilde{r}(x)|f_2(x)|^2)\mathrm{d}x+\int_\Gamma\gamma(x)|f_1(x)|^2)\mathrm{d}\Gamma(x).$$

Le théorème RAGE (Ruelle, Amrein, Georgescu, Enss) pour les semi-groupes de contraction [4] entraine qu'il existe une suite $\{t_k\}$, $t_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ telle que

$$\lim_{h\to+\infty}(U(t_k)f,g)_H=0 \quad \forall\ f,\ g\in H.$$

D'autre part pour f appartenant $D(A)$ on a

$$\|U(t_k)f\|+\|A\,U(t_k)f\|\leqslant\|f\|+\|Af\|<+\infty.$$

Par le théorème de Rellich Kondrasov et le théorème de régularité elliptique, l'ensemble $\{U(t_k)f,\ k\geqslant 1\}$ est précompact dans la norme $\|\cdot\|_R$.

Donc il existe une sous-suite t_{m_k} tendant vers l'infini telle que $U(t_{m_k})f$ converge en norme vers 0. Pour f arbitraire dans H, on conclut par l'argument de densité usuel et (5) est démontré.

On remarque qu'il suffit de prouver le théorème pour f dans un sous-ensemble dense de H. On choisit ici $AD(A)$ qui est dense dans H parce que 0 n'est pas une valeur propre de A ni de son adjoint A^* (même démonstration que pour A). On a

$$\liminf_{t\to+\infty} \|U(t_k)f\|_{4\rho} = 0,\ \forall f \in H.$$

Ainsi pour $\varepsilon > 0$, il existe $\tau(\varepsilon)$ suffisamment grand tel que

$$\|U(\tau)Ag\|_{4\rho} < \varepsilon\ \forall g \in D(A).$$

L'inégalité d'énergie donne

$$\|U(t)d\|_{\rho} \leqslant \|d\|_{4\rho} \quad \forall d \in H,\ 0 \leqslant t \leqslant 3\rho.$$

En appliquant ce résultat $U(\tau)Ag$ on obtient

$$\text{(6)} \qquad \|U(t)Ag\|_{\rho} < \varepsilon \qquad \forall g \in D(A),\ \tau \leqslant t \leqslant \tau + 3\rho.$$

On note $U(t)Ag = (w\,(t,.), \partial_t\, w\,(t,.))$. Soit ξ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3)$ telle que $\xi(x) = 1$ pour $|\,x\,| > \rho$ *et* $\xi(x) = 0$ pour $|\,x\,| < \rho'$ où $\rho' < \rho$ tel que $B\,(0, \rho') \supset K \cup \overline{\Omega}_1$. On pose $v = \xi w$ alors $(v, \partial t\ v) \in H_0$ et vérifie

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta)v = q \text{ dans } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \\ v(0,.) = \xi g_2, \partial_t v(0,.) = \xi(\widetilde{r}^{-1}\Delta g_1 - \widetilde{\beta}/\widetilde{r}\, g_2) \end{cases}$$

avec $q = -\,w\,\hat{\Delta}\xi\, - 2\,\nabla w.\ \nabla\xi$. On a

$$\left\|P_+^\rho\, U(t)Ag\right\| \leqslant \left\|P_+^\rho\,(v, \partial_t\, v\right\| + \left\|P_+^\rho\,(1-\xi)(w, \partial_t\, w\right\|.$$

Or P_+^ρ agit comme l'identité sur les données support dans la boule ouverte $B(0, \rho)$ d'où

$$\left\|P_+^\rho\, U\,(t)Ag\right\| \leqslant \left\|P_+^\rho(v, \partial_t v)\right\| + C\|U(t)Ag\|_\rho.$$

L'inégalité (6) nous amène

$$\left\|P_+^\rho\, U\,(t)Ag\right\| \leqslant \left\|P_+^\rho\,(v, \partial_t\, v)\right\| + C\varepsilon,\ \tau \leqslant t \leqslant \tau + 3\rho.$$

Reste vérifier que

$$\left\|P_+^\rho\,(v, \partial_t\, v)\right\| \leqslant C'\,\varepsilon.$$

Puisque $(v,\ \partial_t\ v) \in H_0$ et plus précisément

$$(v\,(t),\ \partial_t\, v\,(t)) = U_0\,(t)\,(\xi\ Ag),$$

on va employer la représentation par translation de $\{U_0(t)\}$. Cette application, notée $\mathscr{R}$, est basée sur la représentation des solution u de l'équation des ondes dans l'espace libre en une superposition d'ondes planes

$$u(t,x)=\frac{1}{2\pi}\int_{S^2} k(x.\omega-t,\omega)\,d\omega\,,$$

où $k(s,\omega)$ est une fonction définie pour $s\in\mathbb{R}$, et $\omega\in S^2$, la sphère unité. Les données initiales de u, $f=(f_1,f_2)$ sont données par

$$f_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{S^2} k(x.\omega,\omega)\,d\omega\,,\ f_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{S^2}-\partial_s\,k(x.\omega,\omega)\,d\omega\,.$$

On définit la représentation par translation de f, $\mathscr{R}f=k$, par

$$(\mathscr{R}f)(s,\omega)=k(s,\omega)=\frac{1}{4\pi}\{-\partial_s^2 Rf_1(s,\omega)+\partial_s Rf_2(s,\omega)\},$$

où R est la transformée de Radon

$$Rg(s,\theta)=\int_{x.\theta=s} g(x)\,dS(x).$$

On rappelle brièvement les propriétés de $\mathscr{R}$ (voir [2, 4])

$$\begin{cases}(\text{i})\,\mathscr{R}\ \textit{est une application unitaire de } H_0 \textit{ sur } L^2(\mathbb{R}\times S^2)\\ (\text{ii})\,\mathscr{R}\,U_0(t)=T_t\,\mathscr{R} \textit{ où } T_t \textit{ est la translation par rapport à } s \textit{ de } t\\ (\text{iii})\ \mathscr{R}\,D_+^\rho=L^2(]-\infty,-\rho[\times S^2),\ \mathscr{R}\,D_-^\rho=L^2(]\rho,+\infty[\times S^2).\end{cases}$$

On vérifie facilement que

$$\mathscr{R}A_0=-\partial_s\,\mathscr{R}.$$

Ces rappels étant faits, on appelle m le représentant par translation de $(v,\partial_t v)$ et l celui de $(0,q)$. Puisque v vérifie $\square\, v=q$, on a

$$(\partial_t+\partial_s)\,m=l.$$

Grâce aux propriétés de $\mathscr{R}$, on voit que

$$\left\|P_+^\rho(v,\partial_t v)\right\|=\left\|m(t)\right\|_{L^2(]-\infty,\rho[\times S^2)}.$$

Notre but est donc d'estimer la norme L^2 $(]-\infty,\rho[\times S^2)$ de $m(t)$. Choisissant $t=\tau+3\rho$, on a

$$\left\|m(\tau+3\rho)\right\|^2_{L^2(]-\infty,\rho[\times S^2)}=$$

$$=\int_{S^2}\int_{-\infty}^{-\rho}\left|m(s,\tau+3\rho,\omega)\right|^2 ds\,d\omega+\int_{S^2}\int_{-\rho}^{\rho}\left|m(s,\tau+3\rho,\omega\right|^2 ds\,d\omega.$$

Or on remarque que le support de l est dans $[-\rho,\rho]\times S^2$ car q s'annule dans $B(0,\rho)$. Donc pour $s<-\rho$, m vérifie $(\partial_t+\partial_s)\,m=0$, et m est constante le long des caractéristiques

$$m(s,t,\omega)=m(s-t,0,\omega)\ \text{pour}\ s<-\rho.$$

La première partie de la norme de m à calculer s'écrit

$$\int_{S^2}\int_{-\infty}^{-\rho}\left|m(s,\tau+3\rho,\omega)\right|^2 ds\,d\omega=\int_{S^2}\int_{-\infty}^{-\tau-4\rho}\left|m(s,0,\omega)\right|^2 ds\,d\omega\,.$$

Il est clair que cette intégrale tend vers 0 quand τ tend vers l'infini. Pour estimer

$$I=\int_{S^2}\int_{-\rho}^{\rho}|m(s,\tau+3\rho,\omega)|^2\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\omega,$$

on exprime la solution m pour $s\in]-\rho,\rho[$ comme suit

$$m(s,t,\omega)=m(-\rho,t-s-\rho,\omega)+\int_0^{\rho+s}l(\tau'-\rho,t+\tau'-s-\rho,\omega)\mathrm{d}\tau',$$

d'où pour $t=\tau+3\rho$

$$m(s,\tau+3\rho,\omega)=m(-\rho,\tau-s+2\rho,\omega)+\int_0^{\rho+s}l(t-\rho,t+\tau-s+2\rho,\omega)\mathrm{d}t.$$

Or on a

$$m(-\rho,\tau-s+2\rho,\omega)=m(s-\tau-3\rho,0,\omega).$$

En se servant de ce qui précède, on majore I par

$$C\{\int_{S^2}\int_{-\rho}^{\rho}|m(s-\tau-3\rho,0,\omega)|^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\omega+\int_{S^2}\int_{-\rho}^{\rho}\left|\int_0^{\rho+s}l(t-\rho,t+\tau-s-2\rho,\omega)\mathrm{d}t\right|^2\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\omega.$$

On voit, via le changement de variables $s'=s-\tau-3\rho$, que la première de ces deux intégrales tend vers 0 quand τ tend vers l'infini. On s'intéresse maintenant la seconde intégrale soit

$$\left\|\int_0^{\rho+s}l(t-\rho,t+\tau-s+2\rho,\omega)\,dt\right\|_{L^2(]-\rho,\rho[_s\times S^2_\omega)}.$$

Pour $t\in[0,\rho+s]$ on a les inégalités

$$\tau+2\rho-s\leqslant\tau+2\rho-s+t\leqslant\tau+3\rho.$$

On en déduit la majoration suivante

$$\int_0^{\rho+s}|l(t-\rho,t+\tau-s+2\rho,\omega)|\mathrm{d}t\leqslant(\rho+s)\sup_{t\in[\tau+2\rho-s,\tau+3\rho]}\|l(.,t,\omega)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Sachant que s appartient $[-\rho,\rho]$, on a

$$\int_0^{\rho+s}|l(t-\rho,t+\tau-s+2\rho,\omega)|\mathrm{d}t\leqslant 2\rho\sup_{t\in[\tau+\rho,\tau+3\rho]}\|l(.,t,\omega)\|_{L^\infty(\mathbb{R})},$$

et comme $H^1(\mathbb{R})\subset L^\infty(\mathbb{R})$, on en conclut que

$$\int_0^{\rho+s}|l(t-\rho,t+\tau-s+2\rho,\omega)|\mathrm{d}t\leqslant C\,2\rho\sup_{t\in[\tau+\rho,\tau+3\rho]}\{\|l(.,t,\omega)\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|\partial_s l(.,t,\omega)\|_{L^2(\mathbb{R})}\}.$$

La fonction l étant le représentant par translation de $(0,q)$, on a

$$\|l(.,t,\omega)\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|\partial_s l(.,t,\omega)\|_{L^2(\mathbb{R})}=\|(0,q(t))\|_0+\|A_0(0,q(t))\|_0$$

On rappelle que $q=-w\,\Delta\xi-2\nabla w.\nabla\xi$ où w est la première composante de $U(t)Ag$. Il est facile de voir que

$$\|(0,q(t))\|_0\leqslant C(\|U(t)g\|_\rho+\|U(t)Ag\|_\rho)$$

et

$$\|A_0(0,q(t))\|_0 = \|\nabla q\|_{L^2(B(0,\rho))}.$$

La théorie des équations aux dérivées partielles elliptiques nous permet de majorer cette norme par $\|AU(t)g\|_\rho = \|U(t)Ag\|_\rho$ puisque g appartient $D(A)$. On a donc obtenu

$$\int_0^{\rho+s} |l(t-\rho, t+\tau-s+2\rho, \omega)| \, dt \leqslant C\rho \sup_{\tau+\rho \leqslant t \leqslant \tau+3\rho} \{\|U(t)g\|_\rho + \|U(t)Ag\|_\rho\}.$$

En employant nouveau le fait que la vitesse de propagation est finie, on a

$$\int_0^{\rho+s} |l(t-\rho, t+\tau-s+2\rho, \omega)| \, dt \leqslant C\rho \{\|U(\tau)g\|_{4\rho} + \|U(\tau)Ag\|_{4\rho}\}$$

et comme pour τ assez grand

$$\|U(\tau)g\|_{4\rho} < \varepsilon \text{ et } \|U(\tau)Ag\|_{4\rho} < \varepsilon,$$

on a ainsi démontré que

$$\lim_{\tau \to \infty} \left\| \int_0^{\rho+s} l(t-\rho, t+\tau-s+2\rho, \omega) \, dt \right\|_{L^2(]-\rho,\rho[_s \times S^2_\omega)} = 0. \text{ C.Q.F.D.}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Bachelot et V. Petkov, *Existence des opérateurs d'ondes pour les systèmes hyperboliques avec un potentiel périodique en temps*. Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N. S.), **47** (1987), 383–428.
2. P. Lax and R. Phillips, *Scattering Theory*. Academic Press, New York, 1967.
3. P. Lax and R. Phillips, *Scattering theory for dissipative hyperbolic systems*. J. Funct. Anal. **14** (1973), 172–235.
4. V. Petkov, *Scattering Theory for Hyperbolic Operators*. North Holland, Amsterdam, 1989.
5. A. Pujols, *Equations intégrales espace-temps pour le système de Maxwell; application au calcul de la surface équivalente radar*. Thèse, Université Bordeaux 1, 1991.

Reçu le 28 février 1995

Université Bordeaux I
Département de Mathématiques Appliquées
ERS–CNRS 123
351 cours de la Libération, F-33405 Talence Cedex, France
E-mail: bachelot@math. u-bordeaux.fr