UNIVERSITE BORDEAUX-1
UFR mathématiques et informatique

Session de janvier 2011

MASTER MIMSE, MATMECA 3

MSE1312 : Méthodes en électromagnétisme numérique

cours d'Alain BACHELOT
lundi 24 janvier 2011 - Salle SAK1 du btiment A9 - 9H-12H.

-épreuve de 3 heures - tous les documents sont autorisés -

Les deux problèmes sont indépendants.

I. Un modèle en régime temporel

Dans ce problème, toutes les fonctions sont à valeur réelle et les espaces vectoriels sont réels. On s'intéresse à la propagation d'une onde massive à l'extérieur d'un obstacle absorbant. Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière régulière Γ, de normale unitaire rentrante ν et on pose $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$.

On introduit l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = H^1(\Omega') \times L^2(\Omega')$ muni de la norme

$$\| (u_0, u_1) \|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{\Omega'} | \nabla u_0(x) |^2 + | u_0(x) |^2 + | u_1(x) |^2 \, dx,$$

et l'espace $H^1(\Omega', \Delta) = \left\{ u \in H^1(\Omega');\ \Delta u \in L^2(\Omega') \right\}$. On considère l'opérateur

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - 1 & 0 \end{pmatrix},$$

muni du domaine

$$D(A) = \left\{ (u_0, u_1) \in H^1(\Omega', \Delta) \times H^1(\Omega');\ \partial_\nu u_0 + u_1 = 0 \ \ sur \ \ \Gamma \right\}.$$

(1) Montrer que pour tout $(u_0, u_1) \in D(A)$ on a

$$\left\langle A \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \right\rangle \leq 0.$$

(2) Soient $\alpha, \beta > 0$, $f \in L^2(\Omega')$, $g \in L^2(\Gamma)$. En utilisant les formes

$$a(u, v) = \int_{\Omega'} \nabla u(x) \nabla v(x) + \alpha u(x) v(x) dx + \beta \int_{\Gamma} uv d\Gamma,$$

$$l(v) = \int_{\Omega'} f v dx + \int_{\Gamma} g v d\Gamma,$$

montrer que le problème:

$$-\Delta u + \alpha u = f, \ \ x \in \Omega',$$

$$\partial_\nu u + \beta u = g, \ \ x \in \Gamma,$$

admet une unique solution $u \in H^1(\Omega')$. En déduire que $Id - A$ est une surjection de $D(A)$ sur $\mathcal{H}$.

(3) Etant donné $(u_0, u_1) \in D(A)$, montrer que le problème

$$\partial_t^2 u - \Delta u + u = 0, \;\; t \in \mathbb{R}^+, \;\; x \in \Omega',$$
$$\partial_\nu u + \partial_t u = 0, \;\; t \in \mathbb{R}^+, \;\; x \in \Gamma,$$
$$u(0,x) = u_0(x), \;\; \partial_t u(0,x) = u_1(x), \;\; x \in \Omega',$$

admet une unique solution $u \in C^0(\mathbb{R}_t^+, H^1(\Omega', \Delta)) \cap C^1(\mathbb{R}_t^+, H^1(\Omega')) \cap C^2(\mathbb{R}_t^+, L^2(\Omega'))$.

(4) On suppose que u_0 et u_1 sont nuls pour $\mid x \mid > R$. Montrer que

$$\mid x \mid > R + t \Rightarrow u(t,x) = 0.$$

(5) Décrire en détail un schéma d'approximation numérique du problème.

II. Un modèle en régime harmonique

Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière régulière Γ, de normale unitaire rentrante $\nu(x)$ si $x \in \Gamma$, et on pose $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ que l'on suppose connexe. On note $\gamma_0 v$ la trace sur Γ d'une fonction v. Si u est une distribution sur $\Omega \cup \Omega'$, on note respectivement u_i et u_e les restrictions de u à Ω et Ω'. On considère les problèmes extérieurs et intérieurs :

(II.1) $$u_e \in H^1_{loc}(\overline{\Omega'}), \;\; u_e \; satisfait \; la \; condition \;\; sortante \; de \; Sommerfeld,$$

(II.2) $$\Delta u_e + \lambda^2 u_e = 0 \;\; dans \;\; \Omega',$$

(II.3) $$u_i \in H^1(\Omega), \;\; \Delta u_i + \lambda^2 u_i = 0 \;\; dans \;\; \Omega.$$

Si u est donné par u_i dans Ω et u_e dans Ω', on note $[u] = \gamma_0 u_i - \gamma_0 u_e$ son saut à travers Γ, $[\partial_\nu u] = \partial_\nu u_i - \partial_\nu u_e$ le saut de sa dérivée normale. $\mathcal{L}_\lambda$ et $\mathcal{M}_\lambda$ désignent respectivement les potentiels sortant de simple et double couche sur Γ. On rappelle qu'étant donnés $p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $q \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $u = \mathcal{L}_\lambda p - \mathcal{M}_\lambda q$ est l'unique solution de (II.1), (II.2), (II.3), satisfaisant $[\partial_\nu u] = p$, $[u] = q$.
On se propose de résoudre le problème de Dirichlet extérieur par la méthode de potentiel de double couche sous une certaine condition sur la fréquence.

(1) Soit $q \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $q \neq 0$, satisfaisant :

(II.4) $$M_\lambda q + \frac{1}{2} q = 0.$$

On considère $u = -\mathcal{M}_\lambda q$. Déterminer u_e et montrer que u_i est une solution non nulle de (II.3) satisfaisant $\partial_\nu u_i = 0$ (on dit alors que $-\lambda^2$ est une valeur propre du laplacien pour le problème de Neumann intérieur).

(2) On suppose qu'il existe u_i solution non nulle de (II.3) satisfaisant $\partial_\nu u_i = 0$. Montrer que $q = \gamma_0 u_i$ est solution non nulle de (II.4).

(3) Montrer que si $-\lambda^2$ n'est pas valeur propre du laplacien pour le problème de Neumann intérieur, alors pour tout $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe une unique solution $q \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ de l'équation

$$M_\lambda q + \frac{1}{2} q = -g.$$

(4) En déduire que sous cette condition, il existe un unique u_e satisfaisant (II.1), (II.2) et $\gamma_0 u_e = g$.

(5) Décrire en détail un schéma d'approximation numérique pour ce problème.