UNIVERSITE BORDEAUX-1, UFR mathématiques et informatique
INSTITUT POLYTECHNIQUE DE BORDEAUX, MATMECA

Session de janvier 2012

MASTER MIMSE, MATMECA 3

K1MS9103 : Méthodes en électromagnétisme numérique

cours d'Alain BACHELOT

jeudi 26 janvier 2012 - Amphi. d'agrégation de chimie du bâtiment A10 - 9H-12H.

-épreuve de 3 heures - tous les documents sont autorisés -

Les trois problèmes sont indépendants.

I. Le principe d'amplitude limite

Dans cet exercice, on justifie le principe des antennes (et aussi des violons, des orgues, etc.): une onde transitoire $u(t,x)$ générée par une source harmonique $e^{i\lambda t}f(x)$, est asymptote dans le futur à une onde harmonique sortante $e^{i\lambda t}v(x)$.

Etant donnés $f,g,h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on introduit $u \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x)$ solution de

$$\partial_t^2 u - \Delta u = e^{i\lambda t} f, \;\; u(0,x) = g(x), \;\; \partial_t u(0,x) = h(x),$$

et $v \in C^\infty(\mathbb{R}^3_x)$ satisfaisant :

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta v + \lambda^2 v = -f, \\ v \;\; satisfait \; la \; condition \; de \; radiation \; sortante \; de \; Sommerfeld. \end{array} \right.$$

(1) Soit $w \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x)$ la solution de

$$\partial_t^2 w - \Delta w = 0, \;\; w(0,x) = v(x), \;\; \partial_t w(0,x) = i\lambda v(x).$$

En utilisant la formule de représentation de Kirchhoff, montrer que $w(t,0) \longrightarrow 0$ quand $t \to \infty$.

(2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a aussi $w(t,x) \longrightarrow 0$ quand $t \to \infty$.

(3) On introduit la fonction $d(t,x) = u(t,x) - e^{i\lambda t}v(x)$ et la solution u_0 du problème de Cauchy

$$\partial_t^2 u_0 - \Delta u_0 = 0, \;\; u_0(0,x) = g(x), \;\; \partial_t u_0(0,x) = h(x).$$

Calculer $\partial_t^2 d - \Delta d$. En déduire l'expression de d en fonction de u_0 et de w.

(4) Conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\mid u(t,x) - e^{i\lambda t}v(x) \mid \longrightarrow 0$ quand $t \to \infty$.

II. Un modèle en régime temporel

Dans ce problème, toutes les fonctions sont à valeur réelle et les espaces vectoriels sont réels. On se propose de résoudre l'équation de Maxwell du second ordre en champ électrique dans un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, de frontière régulière Γ dont ν désigne la normale unitaire sortante. On suppose que le milieu possède les propriétés du vide $\varepsilon = \mu = 1$, et que Γ modélise un conducteur parfait.

On introduit l'espace

$$H(rot,\Omega) := \left\{F \in \left(L^2(\Omega)\right)^3;\ \ rot(F) \in \left(L^2(\Omega)\right)^3\right\},$$

muni de la norme

$$\| F \|_{rot}^2 = \| F \|_{L^2}^2 + \| rot(F) \|_{L^2}^2 .$$

(1) Montrer que $H(rot,\Omega)$ est un espace de Hilbert.

On admet que $\left(\mathcal{D}(\overline{\Omega})\right)^3$ est dense dans $H(rot,\Omega)$, et on introduit l'espace $H_0(rot,\Omega)$, défini comme l'adhérence de $(\mathcal{D}(\Omega))^3$ dans $H(rot,\Omega)$.

(2) Montrer que pour tout $E, F \in C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$ on a

$$\int_\Gamma (\nu \wedge E)\,.F d\Gamma = \int_\Omega rot\, E.F - E.rot\, F dx.$$

(3) En déduire que l'application $E \mapsto \nu \wedge E$, définie sur $C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^3)$, se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de $H(rot,\Omega)$ dans $\left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^3$.

(4) Montrer que pour tout $E \in H_0(rot,\Omega)$, $F \in H(rot,\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega E(x).rot\, F(x)dx = \int_\Omega rot\, E(x).F(x)dx.$$

En déduire que

$$H_0(rot,\Omega) = \{E \in H(rot,\Omega);\ \nu \wedge E = 0\}.$$

On introduit l'espace de Hilbert $X = H_0(rot,\Omega) \times \left(L^2(\Omega)\right)^3$, muni du produit scalaire

$$(E,F),(E',F') \in X,\ \ < (E,F),(E',F') >_X = \int_\Omega rot\, E(x).rot\, E'(x) + E(x).E'(x) + F(x).F'(x)dx,$$

et l'opérateur

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -rot\, rot & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

de domaine

$$D(A) = \{E \in H_0(rot,\Omega);\ \ rot\, E \in H(rot,\Omega)\} \times H_0(rot,\Omega).$$

(5) Montrer que $(A, D(A))$ est un opérateur maximal dissipatif de domaine dense.

(6) Soient $(u_0,\ u_1) \in D(A)$. Montrer qu'il existe une unique solution $u \in C^2\left(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)^3\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}_t; H(rot,\Omega)\right)$ du problème

$$\text{(II.1)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u + rot\, rot\, u + \partial_t u + \frac{1}{4}u = 0, & t \in \mathbb{R},\ \ x \in \Omega, \\ \nu \wedge u(t,x) = 0, & t \in \mathbb{R},\ \ x \in \Gamma, \\ u(0,x) = u_0(x),\ \ \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

(7) En déduire que pour tout $(E_0,\ E_1) \in D(A)$, le problème

$$\text{(II.2)} \qquad \begin{cases} \partial_t^2 E + rot\, rot\, E = 0, \ \ t \in \mathbb{R},\ \ x \in \Omega, \\ E \in C^2\left(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)^3\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}_t; H(rot,\Omega)\right), \\ \nu \wedge E(t,x) = 0,\ \ t \in \mathbb{R},\ \ x \in \Gamma, \\ E(0,x) = E_0(x),\ \ \partial_t E(0,x) = E_1(x),\ \ x \in \Omega. \end{cases}$$

admet une solution unique.

(8) Décrire un schéma d'approximation numérique du problème (II.2).

III. La méthode de Brakhage et Werner

On se propose de résoudre le problème de Dirichlet extérieur par la méthode de potentiels de simple et double couche combinés, *sans condition sur la fréquence.*

Ω désigne un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, de frontière régulière Γ, de normale unitaire rentrante $\nu(x)$ si $x \in \Gamma$, et on pose $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ que l'on suppose connexe. On note $\gamma_0 v$ la trace sur Γ d'une fonction v. Si u est une distribution sur $\Omega \cup \Omega'$, on note respectivement u_i et u_e les restrictions de u à Ω et Ω'. On considère les problèmes extérieurs et intérieurs :

$$u_e \in H^1_{loc}(\overline{\Omega'}),\ \ u_e \ \textit{satisfait la condition sortante de Sommerfeld}, \tag{III.1}$$

$$\Delta u_e + \lambda^2 u_e = 0 \ \ dans \ \ \Omega', \tag{III.2}$$

$$u_i \in H^1(\Omega),\ \ \Delta u_i + \lambda^2 u_i = 0 \ \ dans \ \ \Omega. \tag{III.3}$$

Si u est donné par u_i dans Ω et u_e dans Ω', on note $[u] = \gamma_0 u_i - \gamma_0 u_e$ son saut à travers Γ, $[\partial_\nu u] = \partial_\nu u_i - \partial_\nu u_e$ le saut de sa dérivée normale. $\mathcal{L}_\lambda$ et $\mathcal{M}_\lambda$ désignent respectivement les potentiels sortant de simple et double couche sur Γ. On rappelle qu'étant donnés $p \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $q \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, $u = \mathcal{L}_\lambda p - \mathcal{M}_\lambda q$ est l'unique solution de (III.1), (III.2), (III.3), satisfaisant $[\partial_\nu u] = p$, $[u] = q$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(1) Soit u_i une solution de (III.3) satisfaisant $\gamma_0 u_i = \alpha^{-1} \partial_\nu u_i$. En évaluant $\int_\Omega (\Delta u_i + \lambda^2 u_i)\overline{u_i} dx$, montrer que $u_i = 0$ sur Γ.

(2) On définit une fonction v par : $v = u_i$ dans Ω et $v = 0$ dans Ω'. Calculer $\Delta v + \lambda^2 v$ dans $\mathbb{R}^3$. En déduire que $u_i = 0$ dans Ω.

(3) Pour $q \in H^{1/2}(\Gamma)$ on considère $u = \alpha \mathcal{L}_\lambda q - \mathcal{M}_\lambda q$. Montrer que si q satisfait

$$\alpha L_\lambda q - M_\lambda q - \frac{1}{2} q = 0,$$

alors $\gamma_0 u_i = \alpha^{-1} \partial_\nu u_i$. En déduire que $q = 0$.

(4) En déduire que pour tout $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, il existe un unique $q \in H^{1/2}(\Gamma)$ tel que

$$\alpha L_\lambda q - M_\lambda q - \frac{1}{2} q = g.$$

(5) En conclure que pour tout $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, il existe une unique solution de (III.2) satisfaisant (III.1) et $\gamma_0 u_e = g$.

(6) Proposer une méthode d'approximation numérique de cette solution.