

CALCUL DES RESONANCES D'UN TROU NOIR

par

Alain BACHELOT

Université BORDEAUX 1 - Unité associée au CNRS 226

I - INTRODUCTION

L'objet de ce travail est la construction d'un cadre mathématique rigoureux pour la notion de résonances d'un trou noir, incluant les approches temporelles et stationnaires du problème de diffraction, dont on établit l'équivalence. Nous proposons de plus une nouvelle méthode de calcul de ces fréquences, basée sur l'approximation par troncature du potentiel d'interaction et l'algorithme de *Prony* [33]. Le détail des démonstrations est paru dans [3].

Le concept de résonances d'un trou noir est lié au problème de la stabilité de la métrique de Schwarzschild vis à vis de perturbations scalaires, électromagnétiques, gravitationnelles... Après linéarisation autour de la solution de Schwarzschild, on montre formellement, qu'un champ sans masse, de spin s , et de petite amplitude, est caractérisé par une fonction d'onde scalaire Ψ , solution de l'équation hyperbolique:

$$\partial_t^2 \Psi - \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left\{ \partial_r \left[\left(1 - \frac{1}{r}\right) \partial_r \Psi \right] + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} \Psi + \frac{s^2 - 1}{r^3} \Psi \right\} = 0,$$

$$\Psi = \Psi(t, r, \omega), \quad t \in \mathbb{R}, \quad r \in]1, \infty[, \quad \omega \in S^2,$$

où Δ_{S^2} est l'opérateur de Laplace Beltrami sur la 2-sphère S^2 (cf. par exemple [5]).

Une décomposition en harmoniques sphériques ramène le problème à l'étude d'une famille de champs scalaires $\Phi_{l,s}$, $l \in \mathbb{N}$, obéissant à l'équation de *Regge-Wheeler* :

$$(I.1) \quad \partial_t^2 \Phi - \partial_x^2 \Phi + V(x) \Phi = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R},$$

où V est le potentiel relatif au multipôle d'indice entier $l \geq 0$:

$$(I.2) \quad V(x) = V_{l,s}(x) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1-s^2}{r^3} \right]$$

et x et r sont reliés par la relation:

$$(I.3) \quad x = r + \text{Log}(r-1), \quad 1 < r < +\infty.$$

Une première approche, en approximation linéaire, du problème de la stabilité de la solution de Schwarzschild consiste donc à étudier le comportement asymptotique des solutions Φ de (I.1) quand $t \rightarrow \pm\infty$, $r \rightarrow 1$, et $t \rightarrow \pm\infty$, $r \rightarrow \infty$. En particulier, on espère décrire ce comportement par un ensemble discret de fréquences, dites de résonances, jouant un rôle dans les problèmes définis sur un ouvert non borné, analogue à celui des valeurs propres dans le cas d'un ouvert borné.

Plus précisément, un nombre complexe σ , $Im \sigma < 0$, $Re \sigma \neq 0$, est une *fréquence de résonance* s'il existe une solution Φ de (I.1) de la forme:

$$(I.4) \quad \Phi(t, x) = e^{-i\sigma t} u(x),$$

où u est solution de l'équation de Schrödinger

$$(I.5) \quad -u'' + V(x)u = \sigma^2 u, \quad x \in \mathbb{R},$$

satisfaisant la condition de radiation sortante de Sommerfeld

$$(I.6) \quad u(x) \approx C_{\pm} e^{\pm i\sigma x}, \quad x \rightarrow \pm\infty.$$

Pour donner un sens précis à (I.6) quand le potentiel V est à courte portée, i.e. $V \in L^1(\mathbb{R})$, mais n'est pas à support compact, on introduit pour $\sigma \in \mathbb{C}$, $\sigma \neq 0$, $Im \sigma \geq 0$, les fonctions de Jost $f_{\pm}(x, \sigma)$ solutions de (I.5) vérifiant

$$(I.7) \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\mp i\sigma x} f_{\pm}(x, \sigma) = 1.$$

On note $W(\sigma)$ le Wronskien de f_+ et f_- :

$$(I.8) \quad W(\sigma) = f_-(x, \sigma) \frac{df_+(x, \sigma)}{dx} - f_+(x, \sigma) \frac{df_-(x, \sigma)}{dx}.$$

L'équation

$$(I.9) \quad W(\sigma) = 0, \quad \sigma \in \mathbb{C},$$

n'a pas de solution réelle non nulle et définit alors trois sortes de fréquences σ :

- les *valeurs propres* associées aux états bornés (i.e. dans $L^2(\mathbb{R}_x)$) de l'équation de Schrödinger (I.5) si $Im \sigma > 0$;
- les *états antibornés* si $Im \sigma < 0$, $Re \sigma = 0$;
- les *résonances* si $Im \sigma < 0$, $Re \sigma \neq 0$.

La fréquence nulle est dite *niveau virtuel* si l'équation (I.5) admet une solution non nulle dans $L^\infty(\mathbb{R}_x)$ pour $\sigma = 0$. Les Astrophysiciens ont coutume d'appeler *fréquences propres du trou noir* les résonances et les états antibornés pour les potentiels $V_{l,s}$, $l \geq s$, et *mode quasi normal* la fonction $f_{\pm}(x, \sigma)$ correspondante.

Le problème fondamental de l'approche stationnaire est donc de justifier le prolongement analytique de $f_{\pm}(x, \sigma)$ pour $Im \sigma < 0$.

Quand le potentiel V est à support compact, ce prolongement analytique est immédiat et la théorie de *Lax* et *Phillips* [20] permet de caractériser élégamment les résonances et les états antibornés σ_j par une décomposition spectrale des solutions Φ de (I.1) :

$$(I.10) \quad \Phi(t, x) \approx \sum_{j=0}^{\infty} C_j e^{-i\sigma_j t} f_{+}(x, \sigma_j) \quad , \quad t \rightarrow +\infty .$$

La relation (I.10) est la base de la méthode numérique de *Prony* [33] appliquée à l'équation des ondes acoustiques par *Majda*, *Strauss* et *Wei* [24].

Notre présente contribution consiste à développer la théorie complète de la diffraction pour l'équation (I.1) : existence et complétude asymptotique des opérateurs d'onde; représentations spectrales rentrantes et sortantes; prolongement méromorphe de la matrice d' Heisenberg; calcul numérique des fréquences propres du trou noir par la méthode de Prony en justifiant l'approximation par troncature des potentiels $V_{l,s}$.

La partie II est consacrée à l'approche dépendant du temps du problème direct de diffraction. L'étude des équations hyperboliques en métrique de Schwarzschild a été initialisée par *J. Dimock* [12] qui construisit les opérateurs d'onde pour le D'Alembertien en tirant partie du caractère répulsif et de courte portée des potentiels $V_{l,0}$; la diffraction du champ électromagnétique est analysée en détail dans [2]; à la différence du cas scalaire, le générateur du propagateur de Maxwell admet un noyau non nul, le second espace de cohomologie, du fait de la trivialité de $V_{0,1}$; à partir du spin 2, les potentiels $V_{l,s}$ ne sont plus positifs pour $l < s$ (modes *non radiatifs*); il peut alors exister un nombre fini d'états bornés, donc de solutions d'énergie finie de la forme (I.4) exponentiellement croissantes; ce fait et les difficultés techniques propres à la dimension 1 (les espaces de Hilbert intervenant contiennent les constantes et le premier espace de Beppo Levi sur \mathbb{R} n'est pas un espace de distributions) rendent plus délicate la construction du cadre fonctionnel; Nous suivons l'approche de *R. Phillips* [31] qui traite de l'équation (I.1) sous l'hypothèse restrictive

$$(I.11) \quad |V(x)| \leq C (1 + |x|)^{-2-\varepsilon} \quad , \quad 0 < \varepsilon .$$

Cette condition n'est pas satisfaite pour les potentiels $V_{l,s}$ qui vérifient seulement

$$(I.12) \quad |V(x)| \leq C (1 + |x|)^{-2} .$$

Nous montrons qu'il est possible de relaxer l'hypothèse (I.11) de Phillips, essentiellement en ne la faisant porter que sur la partie négative du potentiel, et nous établissons l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'onde pour les potentiels V satisfaisant

$$(I.13) \quad \begin{cases} V(x) = V_+(x) - V_-(x), V_{\pm} \geq 0, \\ V_+(x) \leq C(1 + |x|)^{-1-\varepsilon}, 0 < \varepsilon, \\ V_-(x) \leq C(1 + |x|)^{-2-\varepsilon}, 0 < \varepsilon. \end{cases}$$

Nous pouvons ainsi considérer les potentiels d'interaction pour les trous sphériques généraux de type (De Sitter)-Reissner-Nordström décrits par la métrique

$$ds^2 = \alpha^2 dt^2 - \alpha^{-2} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad \alpha = (1 - 2Mr^{-1} + Q^2 r^{-2} - \Lambda r^2/3)^{1/2}, \quad Q \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \Lambda.$$

Dans la partie III nous faisons le lien entre l'approche dépendant du temps et l'approche stationnaire en construisant les représentations spectrales entrantes et sortantes au sens de Lax et Phillips du propagateur de l'équation (I.1). Sous l'hypothèse (I.13), l'opérateur de diffraction est unitairement équivalent à la classique matrice d'Heisenberg associée à l'équation de Schrödinger (I.5) dont les pôles dans $\mathbb{C}^- \setminus i\mathbb{R}^-$ sont les résonances.

On étudie le prolongement analytique de $f_{\pm}(x, \sigma)$ pour $Im \sigma < 0$ dans la partie IV. Les potentiels $V_{l,s}$ n'étant ni à support compact, ni à décroissance exponentielle, nous relierons les propriétés d'analyticité de $W(\sigma)$ à celles de $V_{l,s}$, selon la méthode des rotations de contour employée pour les potentiels de Yukawa. On est ainsi amené à considérer le problème du prolongement analytique de la réciproque de la transformation de Wheeler (I.3)

$$(I.14) \quad x \in \mathbb{R} \rightarrow r = r(x) \in]1, +\infty[, \text{ où } x = r + \text{Log}(r-1).$$

Cette question a été abordée par *Hartle et Wilkins* dans [16], sans que le domaine d'holomorphic de l'application $x \rightarrow r$ soit précisément défini: la détermination de la surface de Riemann associée reste à faire. Il nous suffit ici de démontrer que l'application (I.14) définie sur \mathbb{R} admet un prolongement analytique dans un domaine $\{x \in \mathbb{C}, |Re x| > A\}$. On en déduit l'analyticité de $f_{\pm}(x, \sigma)$ pour $\sigma \in \mathbb{C}^- \setminus i\mathbb{R}^-$ ce qui fonde la théorie des résonances d'un trou noir; en revanche, la présence de la coupure $i\mathbb{R}^-$ ne nous permet pas de considérer les états antibornés et d'élucider la nature des fréquences

$$(I.15) \quad \sigma = -\frac{1}{6}(l-1)l(l+1)(l+2)i,$$

associées aux potentiels $V_{l,2}$, $l \geq 2$ (fréquences caractéristiques des *perturbations algébriques spéciales* de *Chandrasekhar* [6]). Outre l'étude de la coupure $i\mathbb{R}^-$, nous laissons ouverts d'autres problèmes fondamentaux :

- existence d'une infinité de résonances;
- leur répartition asymptotique;
- non coïncidence de résonances relatives à des modes distincts;
- validité de la décomposition spectrale (I.10) pour les potentiels $V_{l,s}$ justifiant ainsi la notion de *coefficients d'excitation*, les C_j , de *Sun et Price* [32].

La décomposition (I.10) étant établie pour les potentiels à support compact, il est naturel d'étudier l'approximation par troncature des potentiels $V_{l,s}$. Dans la partie V nous légitimons cette approche en démontrant que les résonances associées à $V_{l,s}$ sont les limites quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow +\infty$, des résonances associées aux potentiels amortis et tronqués $V_{l,s}(x) e^{-\varepsilon|x|^\gamma} \chi_{[a,b]}(x)$, $\gamma > 1$. Il s'agit en fait d'une extension du *paradigme de la membrane* fondé par T. Damour [8], [9], [10], D.A. Mac Donald, R.H. Price, K.S. Thorne [23], la troncature revenant à remplacer respectivement l'horizon du trou noir et l'infini spatial par deux sphères de rayons respectifs $r(a)$ et $r(b)$, et à considérer un problème aux limites dans la coquille $\mathbb{R}_t \times [a, b]_x \times S^2$ avec conditions dissipatives à la frontière. Nous montrons que le formalisme de la membrane est équivalent à la théorie du semi groupe $Z(t)$ de Lax et Phillips: le propagateur du problème mixte est isométrique au semi groupe Z associé au potentiel tronqué, et les valeurs propres de son générateur infinitésimal, en nombre infini, sont les résonances.

Ce résultat nous permet dans la partie VI de développer une procédure de calcul numérique des résonances par une méthode dépendant du temps : l'algorithme de Prony appliqué à la formule (I.10) fournit la valeur des σ_j (et éventuellement celle des C_j) à partir du signal $t \rightarrow \Phi(t, x)$ préalablement calculé.

Le problème du calcul des résonances est très délicat du fait que ces pôles n'étant pas caractérisés de façon variationnelle, sont très instables vis à vis d'un léger changement de potentiel : par exemple, les résonances (en nombre infini) associées à $V_\varepsilon(x) = \varepsilon \chi_{[0,1]}(x)$ dépendent continûment de $\varepsilon > 0$ mais disparaissent à l'infini quand $\varepsilon \rightarrow 0$; ceci constitue la limitation du procédé de troncature susceptible de faire apparaître des résonances parasites, mais cette difficulté est inhérente à toutes les méthodes connues : on ne dispose pas d'évaluation de l'erreur commise ni de critère permettant d'affirmer que les valeurs obtenues ne sont pas des artefacts numériques engendrés par les inévitables approximations. Ainsi est-il très important d'expérimenter des méthodes différentes et d'en comparer les résultats. A cet égard, notre approche présente le double avantage d'être non stationnaire, et très précise dans le calcul des premières résonances, alors que les principales méthodes employées, fractions continues de E. Leaver [22] et approximation WKB [17] (voir aussi [7] [14] [25] [28] [30]) sont stationnaires et présentent des écarts notables [15]. Cette nouvelle méthode numérique a été développée sur CRAY 2 et nous constatons un accord remarquable entre nos valeurs des premières résonances et celles de Leaver.

II- THÉORIE DE LA DIFFRACTION DÉPENDANT DU TEMPS EN DIMENSION 1

L'objet de cette partie est l'étude des opérateurs d'onde pour l'équation hyperbolique :

$$(II.1) \quad \partial_t^2 u = -L_V u \equiv \partial_x^2 u - V(x)u, \quad t, x \in \mathbb{R},$$

considérée comme perturbation de l'équation libre :

$$(II.2) \quad \partial_t^2 u_0 = -L_0 u_0 \equiv \partial_x^2 u_0, \quad t, x \in \mathbb{R}.$$

Les propriétés spectrales de l'opérateur L_V sont données par la :

PROPOSITION II.1 - Si le potentiel V satisfait l'hypothèse (I.13), L_V est un opérateur autoadjoint de domaine dense dans $L^2(\mathbb{R})$ dont le spectre absolument continu est $[0, +\infty[$, le spectre continu-singulier est vide et le spectre ponctuel se compose d'un nombre au plus fini de valeurs propres simples, négatives ou nulles ; si V est positif le spectre ponctuel est vide ; si V vérifie :

$$(II.3) \quad \chi_{\mathbb{R}^-}(x) \cdot V(x) \in L^1(\mathbb{R}^-, (1+x^2) dx),$$

0 n'est pas valeur propre.

REMARQUE II.1 - Les potentiels $V_{l,s}$ définis par (I.2) et (I.3) satisfont les conditions (I.13) et (II.3).

Pour $f = {}^t(f_1, f_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \times C_0^\infty(\mathbb{R})$, on définit les formes sesquilinéaires d'énergie associées aux équations (II.1) et (II.2) :

$$(II.4) \quad E(f) = \int_{\mathbb{R}} |f_1'|^2 + |f_2|^2 + V(x) |f_1|^2 dx,$$

$$(II.5) \quad E_0(f) = \int_{\mathbb{R}} |f_1'|^2 + |f_2|^2 dx.$$

On introduit la forme définie positive :

$$(II.6) \quad E_+(f) = \int_{\mathbb{R}} |f_1'|^2 + |f_2|^2 + [V_+(x) + \chi_{[0,1]}(x)] |f_1|^2 dx.$$

On note

$$(II.7) \quad \mathcal{H}_0 = BL^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}),$$

$$(II.8) \quad \mathcal{H}_+ = H_+(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}).$$

Les complétés respectifs de $C_0^\infty(\mathbb{R}) \times C_0^\infty(\mathbb{R})$ pour les normes E_0 et E_+ . $H_+(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $C^0(\mathbb{R})$ qui contient les constantes et dont le quotient par \mathbb{C} est isométrique à l'espace de Beppo-Lévi $BL^1(\mathbb{R})$. On écrit les équations (II.1) et (II.2) sous forme vectorielle :

$$(II.1 \text{ bis}) \quad \partial_t U(t) f = AU(t) f, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -L_V & 0 \end{pmatrix},$$

$$(II.2 \text{ bis}) \quad \partial_t U_o(t) f = A_o U_o(t) f, \quad A_o = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -L_o & 0 \end{pmatrix},$$

où

$$(II.9) \quad U(t) f = {}^t(u(t), \partial_t u(t)), \quad f = {}^t(u(0), \partial_t u(0)),$$

$$(II.10) \quad U_o(t) f = {}^t(u_o(t), \partial_t u_o(t)), \quad f = {}^t(u_o(0), \partial_t u_o(0)).$$

A_o est un opérateur antiautoadjoint sur \mathcal{H}_o qui génère le groupe unitaire $U_o(t)$; A est défini sur \mathcal{H}_+ au sens des distributions sur \mathbb{R} . Le problème perturbé est résolu par la :

PROPOSITION II.2 - *L'opérateur A de domaine $D(A) = \{f \in \mathcal{H}_+ ; Af \in \mathcal{H}_+\}$ engendre un groupe fortement continu d'opérateurs bornés $U(t)$ sur \mathcal{H}_+ qui vérifie :*

$$(II.11) \quad f \in \mathcal{H}_+, \quad E(U(t) f) = E(f),$$

$$(II.12) \quad \exists k > 0, \quad \forall f \in \mathcal{H}_+, \quad E_+(U(t) f) \leq e^{k|t|} E_+(f).$$

Pour construire les opérateurs d'onde, nous introduisons certains sous-espaces de \mathcal{H}_+ ; si l'opérateur L_V sur $L^2(\mathbb{R})$ admet N valeurs propres $-\lambda_j^2 < 0$, associées aux vecteurs propres u_j :

$$(II.13) \quad 1 \leq j \leq N, \quad L_V u_j = -\lambda_j^2 u_j, \quad u_j \in L^2(\mathbb{R}), \quad \|u_j\|_{L^2} = 1/\sqrt{2},$$

on note

$$(II.14) \quad f_j^\pm = {}^t(u_j, \pm \lambda_j u_j)$$

les vecteurs propres de A correspondants :

$$(II.15) \quad A f_j^\pm = \pm \lambda_j f_j^\pm.$$

Soient \mathcal{P} le sous-espace vectoriel engendré par les f_j^\pm

$$(II.16) \quad \mathcal{P} = \left\{ \sum_{+,-} \sum_{j=1}^N \alpha_j^\pm f_j^\pm ; \alpha_j^\pm \in \mathbb{C} \right\},$$

\mathcal{H} le E -orthogonal de \mathcal{P} dans \mathcal{H}_+ :

$$(II.17) \quad \mathcal{H} = \{f \in \mathcal{H}_+, \quad E(f, g) = 0 \quad \forall g \in \mathcal{P}\},$$

et P le projecteur E -orthogonal de \mathcal{H}_+ sur \mathcal{H}

$$(II.18) \quad f \in \mathcal{H}_+, \quad Pf = f + \sum_{j=1}^N \lambda_j^{-2} [E(f, f_j^-) f_j^+ + E(f, f_j^+) f_j^-].$$

\mathcal{H} est un sous-espace $U(t)$ -invariant sur lequel E est une forme positive mais non définie si l'espace :

$$(II.19) \quad \mathcal{Z} = \text{Ker } A$$

est non trivial. Aussi introduit-on le quotient $\hat{\mathcal{H}}$ de \mathcal{H} par \mathcal{Z} et Π la surjection canonique associée :

$$(II.20) \quad \hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}/\mathcal{Z}, \quad \Pi : \mathcal{H} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}, \quad f \rightarrow \hat{f} = f + \mathcal{Z}.$$

Enfin, pour inverser les opérateurs d'onde, on utilisera :

$$(II.21) \quad \mathcal{Z}_1 = \text{Ker } A^2,$$

et \hat{E} étant l'image de la forme E par Π , $\hat{\mathcal{H}}_1$ désigne le \hat{E} -orthogonal de $\hat{\mathcal{Z}}_1 = \mathcal{Z}_1/\mathcal{Z}$:

$$(II.22) \quad \hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_1 \oplus \hat{\mathcal{Z}}_1, \quad \hat{\mathcal{Z}}_1 = \mathcal{Z}_1/\mathcal{Z}.$$

Si V satisfait (II.3) alors $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1$.

Dans le cas des potentiels $V_{l,s}$, ces espaces sont décrits par la :

PROPOSITION II.3 - Pour $0 \leq s \leq l$

$$(II.23) \quad \mathcal{P} = \mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 = \{0\}.$$

Pour $s = 1, l = 0$

$$(II.24) \quad \mathcal{P} = \{0\}, \quad \mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 = \mathbf{C} \times \{0\}.$$

Pour $s = 2, l = 0$

$$(II.25) \quad \dim \mathcal{P} = 1,$$

$$(II.26) \quad \mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 = \left\{ \left(\lambda \cdot \frac{3-2r}{r}, 0 \right), \lambda \in \mathbf{C} \right\}.$$

Pour $s = 2, l = 1$

$$(II.27) \quad \mathcal{P} = \{0\}$$

$$(II.28) \quad \mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 = \left\{ \left(\frac{\lambda}{r}, 0 \right), \lambda \in \mathbf{C} \right\}.$$

La structure de $\hat{\mathcal{H}}$ est décrite par la :

PROPOSITION II.4 - Etant donné un potentiel V satisfaisant l'hypothèse (I.13),

i) la forme \hat{E} définie sur $\hat{\mathcal{H}}$ par :

$$(II.29) \quad \hat{f} \in \hat{\mathcal{H}}, \quad \hat{E}(\hat{f}) = E(f), \quad f \in \hat{f},$$

est une norme sur $\hat{\mathcal{H}}$ équivalente à la norme canonique.

ii) Si le potentiel V satisfait de plus (II.3), on a :

$$\dim \mathcal{Z} \leq 1,$$

$$0 \leq V \neq 0 \Rightarrow \mathcal{Z} = \{0\}.$$

REMARQUES II.2 -

- Le potentiel $V_{0,1}$ étant trivial, les constantes sont associées à la fréquence nulle qui est un niveau virtuel et correspondent aux champs électromagnétiques stationnaires du second espace de cohomologie [2].

- L'existence d'un état borné pour $V_{0,2}$ découle du fait que les éléments de \mathcal{Z} s'annulent en un point, pour $r=3/2$ et la valeur de l'unique valeur propre $-\lambda^2 = \sigma^2 < 0$ de $L_{V_{0,2}}$ calculée par la méthode de Prony de la partie VI est donnée par:

$$(II.30) \quad \sigma = (0.382223 \pm 2.10^{-6})i$$

On doit noter que cette solution ne définit pas une perturbation à symétrie sphérique de l'espace-temps de Schwarzschild car pour $l < s$ l'harmonique sphérique spinorielle correspondante n'existe pas. Quoique pour la même raison les harmoniques $l = 0, l = 1$ ne soient pas considérées d'intérêt physique pour les ondes gravitationnelles (modes non radiatifs) les fonctions $\frac{3-2r}{r}$ et $\frac{1}{r}$ de (II.26) et (II.28) associées au niveau virtuel 0, apparaissent dans l'analyse des perturbations algébriques spéciales de S. Chandrasekhar (fonctions χ (108) de [6]).

Les groupes $U_o(t)$ et $U(t)$ opérant sur des espaces de Hilbert différents, on doit introduire un opérateur d'identification entre ces espaces. Plutôt que d'introduire les opérateurs pseudodifférentiels $L_{V_+}^{-1/2} L_o^{1/2} \oplus Id$ qui délocalisent les supports, nous choisissons l'injection canonique :

$$(II.31) \quad \mathcal{I} : \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_o ; \quad \forall f \in C_o^\infty, \quad \mathcal{I}f = f,$$

et les opérateurs d'ondes

$$(II.32) \quad W_\pm f = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Pi P U(-t) \mathcal{I}^{-1} U_o(t) f \text{ dans } \hat{\mathcal{H}}$$

qui seront définis a priori sur le sous-espace \mathcal{D}_o dense dans \mathcal{H}_o :

$$(II.33) \quad \mathcal{D}_o = \{f = {}^t(f_1, f_2) \in C_o^\infty(\mathbb{R}) \times C_o^\infty(\mathbb{R}), \int f_2(x) dx = 0\}.$$

Le résultat fondamental de cette partie est le :

THEOREME II.1 - On suppose que le potentiel V satisfait (I.13). Alors pour tout f de \mathcal{D}_o , les limites $W_+ f, W_- f$ existent dans $\hat{\mathcal{H}}$ et on a :

$$(II.34) \quad W_\pm f \in \hat{\mathcal{H}}_1, \quad \hat{E}(W_\pm f) = E_o(f).$$

Les opérateurs W_+, W_- se prolongent de façon unique en isométries de \mathcal{H}_o sur $\hat{\mathcal{H}}_1$ et l'opérateur de diffraction :

$$(II.35) \quad S = W_+^{-1} W_-$$

est une isométrie de \mathcal{H}_o sur \mathcal{H}_o .

Idée de la preuve : L'existence de $W_{\pm} f$ pour f dans \mathcal{D}_0 est établie par la méthode de Cook, le potentiel V étant à courte portée (i.e. $V \in L^1(\mathbb{R})$). Pour inverser W_{\pm} on introduit le sous-espace L_c^2 de $L^2(\mathbb{R})$, orthogonal aux fonctions propres de L_V sur lequel L_V est un opérateur strictement positif. Le théorème d'Agmon-Kato-Kuroda et le principe d'invariance assurent l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'onde associés à $(L_0|_{L_c^2})^{1/2}$ et $(L_V|_{L_c^2})^{1/2}$. On en déduit que les solutions perturbées de donnée initiale f dans :

$$(II.36) \quad \mathcal{D}_1 = \{f = {}^t(\varphi_1, L_V \varphi_2); \varphi_i \in L_c^2, L_V \varphi_i \in L^2(\mathbb{R})\}$$

sont asymptotiquement libres :

$$(II.37) \quad \exists f_{\pm} \in \mathcal{H}_0, \lim_{t \rightarrow \pm\infty} E_0(U(t)f - U_0(t)f_{\pm}) = 0.$$

On conclut en montrant que $\Pi P \mathcal{D}_1$ est dense dans $\hat{\mathcal{H}}_1$.

COROLLAIRE II.1 - Si $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_1 = \{0\}$, toute solution $\Phi(t, x)$ de l'équation (I.1) à données initiales dans \mathcal{H} tend vers 0 dans $L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}_x)$ quand t tend vers $\pm\infty$.

REMARQUE II.3 - E. Leaver donne des arguments dans [21] en faveur d'une décroissance polynomiale (en t^{-2l-3} pour $V_{l,2}$). Notre expérimentation numérique a mis en évidence une décroissance exponentielle dominée par la première résonance durant l'intervalle de calcul (c.f. la remarque V.4 et la partie VI). Si l'on considère que celui-ci est seulement un temps "intermédiaire", la conjecture de Leaver n'est pas infirmée par nos calculs. Cette situation rappelle le cas bien connu de l'équation de Schrödinger dépendant du temps: la décroissance de $\langle \Psi_0 | e^{iL_V} \Psi_0 \rangle$ est à peu près exponentielle pour des temps ni trop grands, ni trop petits, phénomène donnant lieu au fameux *Paradoxe de Zénon quantique*. Le problème du comportement asymptotique ponctuel des solutions de l'équation (I.1) reste ouvert.

III- Représentations spectrales - Matrice d'Heisenberg.

Une représentation spectrale permet de représenter un groupe unitaire par l'opérateur de multiplication $e^{i\sigma t}$ sur $L^2(\mathbb{R}_\sigma; \mathcal{N})$ où \mathcal{N} est un espace de Hilbert auxiliaire, ici \mathcal{N} est l'espace $L^2((1,+1)_\omega) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Pour définir la représentation libre, on introduit la fonction propre généralisée φ_o de A_o pour la fréquence σ ,

$$(III.1) \quad \sigma \in \mathbb{R}^*, \omega \in (-1, 1), \varphi_o(x, \sigma, \omega) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} {}^t(e^{-i\sigma x \omega}, i\sigma e^{-i\sigma x \omega})$$

et pour $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}_x) \times C_o^\infty(\mathbb{R}_x)$ on pose :

$$(III.2) \quad \mathcal{R}_o f(\sigma, \omega) = E_o(f, \varphi_o(\cdot, \sigma, \omega)).$$

\mathcal{R}_o se prolonge en une isométrie de \mathcal{H}_o sur $L^2(\mathbb{R}_\sigma \times \{-1, 1\}_\omega)$ vérifiant :

$$(III.3) \quad [\mathcal{R}_o U_o(t)f](\sigma, \omega) = e^{i\sigma t} [\mathcal{R}_o f](\sigma, \omega).$$

Nous considérons le groupe unitaire perturbé $\hat{U}_1(t)$ sur $\hat{\mathcal{H}}_1$ défini par :

$$(III.4) \quad \hat{f} \in \hat{\mathcal{H}}_1, \hat{U}_1(t)\hat{f} = \Pi U(t)f, \quad f \in \hat{f}.$$

On introduit les représentations spectrales, sortante \mathcal{R}_+ , rentrante \mathcal{R}_- , de $\hat{\mathcal{H}}_1$ associées au groupe unitaire $\hat{U}_1(t)$ en posant :

$$(III.5) \quad \hat{f} \in \hat{\mathcal{H}}_1, \mathcal{R}_\pm \hat{f} = \mathcal{R}_o W_\pm^{-1} \hat{f}.$$

La complétude asymptotique et la relation :

$$(III.6) \quad W_\pm U_o(t) = \hat{U}_1(t) W_\pm$$

assurent que \mathcal{R}_+ et \mathcal{R}_- sont des isométries de $\hat{\mathcal{H}}_1$ sur $L^2(\mathbb{R}_\sigma \times \{-1, 1\}_\omega)$ vérifiant :

$$(III.7) \quad \hat{f} \in \hat{\mathcal{H}}_1, [\mathcal{R}_\pm \hat{U}_1(t)\hat{f}](\sigma, \omega) = e^{it\sigma} [\mathcal{R}_\pm \hat{f}](\sigma, \omega).$$

Nous montrons que \mathcal{R}_+ et \mathcal{R}_- sont caractérisées par une formule analogue à (III.2) à l'aide de fonctions propres généralisées $\varphi_\pm(x, \sigma, \omega)$ de A : pour $\sigma \in \mathbb{R}^*$, la solution $u_\pm(x, \sigma, \omega)$ du problème :

$$(III.8) \quad \begin{cases} L_V u_\pm = \sigma^2 u_\pm, \\ u_\pm(x, \sigma, \omega) = e^{-i\sigma x \omega} + v_\pm(x, \sigma, \omega), \\ v_\pm(x, \sigma, \omega) \sim e^{\pm i\sigma|x|}, |x| \rightarrow \infty, \end{cases}$$

est obtenue en choisissant :

$$(III.9) \quad u_\pm(x, \sigma, \omega) = T(\pm \sigma) f_{\mp \omega}^+(x, \pm \sigma)$$

où les fonctions de Jost f_\pm sont données par (I.7) et le coefficient de transmission $T(\sigma)$ est défini par :

$$(III.10) \quad T(\sigma) \cdot W(\sigma) = 2i\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{R}^* ;$$

on pose alors :

$$(III.11) \quad \varphi_\pm(x, \sigma, \omega) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} {}^t(u_\pm(x, \sigma, \omega), i\sigma u_\pm(x, \sigma, \omega)).$$

THEOREME III.1 - On suppose que le potentiel V satisfait l'hypothèse (I.13). Alors l'ensemble

$$(III.12) \quad \hat{\mathcal{D}}_{1,1} = \Pi \mathcal{D}_{1,1}, \quad \mathcal{D}_{1,1} = \{f \in \mathcal{D}_1; \frac{df_1}{dx}, f_2 \in L^1(\mathbb{R})\}$$

est dense dans $\hat{\mathcal{H}}_1$ et pour tout $\hat{f} \in \hat{\mathcal{D}}_{1,1}$ on a:

$$(III.13) \quad \mathcal{R}_\pm \hat{f} = E(f, \varphi_\mp), \quad f \in \hat{f} \cap \mathcal{D}_{1,1}$$

La formule (III.13) nous permet de faire le lien avec la théorie stationnaire de la diffraction. L'opérateur de diffraction S est unitairement équivalent à l'isométrie \mathcal{S} de $L^2(\mathbb{R}_\sigma \times \{-1, 1\}_\omega)$:

$$(III.14) \quad \mathcal{S} = \mathcal{R}_+ \mathcal{R}_-^{-1} = \mathcal{R}_0 S \mathcal{R}_0^{-1}.$$

Nous montrons que \mathcal{S} est représentable par la matrice d'Heisenberg $\mathcal{S}(\sigma, \omega, \eta)$ associée à l'équation de Schrödinger (I.5):

$$(III.15) \quad \sigma \in \mathbb{R}^*, \quad \omega \in \{-1, 1\}, \quad \mathcal{S}(\sigma, \omega, \omega) = T(\sigma), \quad \mathcal{S}(\sigma, \omega, -\omega) = R_{-\omega}(\sigma),$$

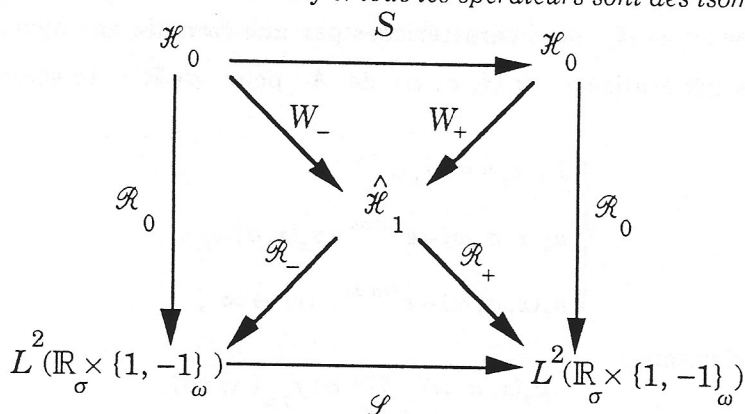
où les coefficients de réflexion $R_\omega(\sigma)$ sont définis par:

$$(III.16) \quad \begin{cases} 2i\sigma R_+(\sigma) = T(\sigma) [f_+(x, -\sigma) \frac{df_-}{dx}(x, \sigma) - f_-(x, \sigma) \frac{df_+}{dx}(x, -\sigma)], \\ 2i\sigma R_-(\sigma) = T(\sigma) [f_+(x, \sigma) \frac{df_-}{dx}(x, -\sigma) - f_-(x, -\sigma) \frac{df_+}{dx}(x, \sigma)]. \end{cases}$$

THEOREME III.2 - On suppose que le potentiel V satisfait l'hypothèse (I.13). Alors pour tout $F \in L^2(\mathbb{R}_\sigma \times \{-1, 1\}_\omega)$ on a:

$$(III.17) \quad (\mathcal{S}F)(\sigma, \omega) = T(\sigma) F(\sigma, \omega) + R_{-\omega}(\sigma) F(\sigma, -\omega), \quad \sigma \in \mathbb{R}^*, \quad \omega \in \{-1, 1\},$$

de plus, le diagramme suivant est commutatif et tous les opérateurs sont des isométries surjectives:



REMARQUE III.1 : Il suffit que le potentiel V soit simplement dans $L^1(\mathbb{R})$ pour assurer l'existence de la matrice \mathcal{S} ; on peut alors définir l'opérateur S par la relation (III.14); nous laissons ouvert le problème de la construction d'un espace $\hat{\mathcal{H}}_1$ et d'opérateurs d'ondes W_\pm .

IV- ANALYTICITÉ DE LA MATRICE DE DIFFRACTION

Pour $\sigma \in \mathbb{R}^*$, les fonctions de Jost $f_{\pm}(x, \sigma)$ sont obtenues en résolvant par itérations successives l'équation intégrale :

$$(IV.1) \quad f_{\pm}(x, \sigma) = e^{\pm i\sigma x} + \int_{\pm\infty}^x \frac{\sin\sigma(x-y)}{\sigma} V(y) f_{\pm}(y, \sigma) dy.$$

Les propriétés classiques d'analyticité par rapport à σ sont données par la :

PROPOSITION IV.1 - *On suppose que le potentiel V satisfait l'hypothèse (I.13). Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, les fonctions de σ , $f_{\pm}(x, \sigma)$ sont continues dans $\{\sigma \in \mathbb{C}, \text{Im } \sigma \geq 0, \sigma \neq 0\}$ et analytiques dans $\{\sigma \in \mathbb{C}, \text{Im } \sigma > 0\}$. Si, de plus, il existe $\alpha_{\pm} \geq 0, C_{\pm} > 0$ tels que :*

$$(IV.2) \quad |V(x)| \leq C_{\pm} e^{\mp \alpha_{\pm} x}, \quad \pm x \geq 0,$$

$f_{\pm}(x, \sigma)$ est analytique dans $\{\sigma \in \mathbb{C}, \text{Im } \sigma > -\frac{1}{2} \alpha_{\pm}\}$. Si V est un potentiel borné à support compact, f_{\pm} sont des fonctions entières de σ .

REMARQUE IV.1 : Dans le cas des potentiels $V_{l,s}, \frac{1}{2} \alpha_{-}$ est la gravité de surface à l'horizon du trou noir et on a :

$$(IV.3) \quad \alpha_{-} = 1, \quad \alpha_{+} = 0.$$

Si la constante cosmologique est non nulle (trou noir de De Sitter-Schwarzschild ou De Sitter-Reissner-Nördström) α_{+} est strictement positif et les potentiels $V_{l,s}$ sont aussi exponentiellement décroissants au voisinage de l'horizon cosmologique ce qui assure l'analyticité de la matrice de diffraction dans la bande :

$$(IV.4) \quad \{\sigma \in \mathbb{C}, |\text{Im } \sigma| < \frac{1}{2} \text{Min}(\alpha_{+}, \alpha_{-})\}.$$

Pour étendre le domaine d'analyticité de $f_{\pm}(x, \sigma)$ on utilise les propriétés analytiques du potentiel V . Dans l'étude des trous noirs, il est donc nécessaire de considérer un prolongement analytique de la fonction inverse de Regge-Wheeler :

$$(IV.5) \quad x \rightarrow r = r(x); \quad 1 < r < \infty \Rightarrow x = r + \text{Log}(r-1).$$

PROPOSITION IV.2 - *L'application $r(x)$, définie continue de \mathbb{R}_x sur $]1, +\infty[_r$, admet un prolongement holomorphe dans un domaine :*

$$(IV.6) \quad \{x \in \mathbb{C}, |\Re e x| > A\}, \quad A > 0,$$

et vérifie :

$$(IV.7) \quad r(x) = 1 + e^{x-1} + o(e^x), \quad \Re e x \rightarrow -\infty,$$

$$(IV.8) \quad r(x) = x + o(x), \quad \Re e x \rightarrow +\infty.$$

REMARQUE IV.2 : On obtient $r(x)$ sous forme de séries absolument convergentes du type :

$$(IV.9) \quad \Re x < -A, \quad r = 1 + e^{x-1} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k e^{kx},$$

$$(IV.10) \quad \Re x > A, \quad r = x - \text{Log}(x-1) + \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} C_{p,q} (x-1)^{-p-q-1} [\text{Log}(x-1)]^{q+1}.$$

Les propriétés (IV.6, IV.7, IV.8) assurent l'existence d'un prolongement analytique des potentiels $V_{l,s}$:

PROPOSITION IV.3 - Pour tout entier l et tout réel s , il existe $B > 0$ tel que le potentiel $V_{l,s}$ satisfasse :

$$(IV.11) \quad \begin{cases} (i) & V \text{ est continu sur } \mathbb{R} \cup \{x \in \mathbb{C}, |\Re x| \geq B\} \text{ analytique à l'intérieur,} \\ & \text{et pour tout } \theta \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\text{ on a :} \\ (ii) & \int_{\rho > 0} |V(\pm B \pm \rho e^{i\theta})| d\rho < +\infty \\ (iii) & \sup_{|\alpha| \leq |\theta|} |\rho V(\rho e^{i\alpha})| \rightarrow 0, \rho \in \mathbb{R}, \rho \rightarrow \pm \infty. \end{cases}$$

Par une rotation du chemin d'intégration de l'intégrale de (IV.1), on établit le résultat fondamental de cette partie.

THEOREME IV.1 - On suppose que le potentiel V satisfait les hypothèses (IV.2) et (IV.11). Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, $f_-(x, \sigma)$ est analytique dans $\{\sigma \in \mathbb{C}, \sigma \neq \lambda i, \lambda \in]-\infty, -\alpha_-/2]\}$ et $f_+(x, \sigma)$ est analytique dans $\{\sigma \in \mathbb{C}, \sigma \neq \lambda i, \lambda \in]-\infty, -\alpha_+/2]\}$.

Compte tenu de (IV.3), la matrice d'Heisenberg associée à la diffraction d'un champ sans masse de spin s par un trou noir de Schwarzschild est méromorphe dans $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$; ses singularités dans $\mathbb{C}^- \setminus i\mathbb{R}^-$ sont les pôles du coefficient de transmission $T(\sigma)$, c'est-à-dire les résonances ou fréquences propres du trou noir.

V- PARADIGME DE LA MEMBRANE : APPROXIMATION PAR AMORTISSEMENT ET TRONCATURE

Quand le potentiel V est à support compact dans $[a, b]$, les résonances coïncident avec les valeurs propres du générateur du fameux semi-groupe Z de Lax-Phillips [20]. Nous montrons que le *Paradigme de la Membrane* [9][23] donne une interprétation simple de ce semi groupe abstrait : Z est unitairement équivalent au propagateur du problème mixte hyperbolique:

$$(V.1) \quad \partial_t^2 \Phi - \partial_x^2 \Phi + V(x) \Phi = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in]a, b[,$$

$$(V.2) \quad \partial_t \Phi(t, a) - \partial_x \Phi(t, a) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

$$(V.3) \quad \partial_t \Phi(t, b) + \partial_x \Phi(t, b) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

La condition (V.2) est la condition d'impédance ou de radiation rentrante imposée sur la membrane ou horizon élargi $\{r = r(a)\} \times S^2$ et (V.3) est la condition sortante analogue sur un "horizon cosmologique rétréci" $\{r = r(b)\} \times S^2$. On en déduit qu'une solution Φ de l'équation (I.1) dont le support des données initiales est inclus dans $]a, b[$ coïncide avec la solution de (V.1, 2, 3) de mêmes données. Ainsi l'étude de la diffraction par un trou noir dans le cadre du formalisme de la membrane est ramenée à l'étude de la diffraction par les potentiels tronqués:

$$(V.4) \quad V_{l,s}^{a,b}(x) = \chi_{[a,b]}(x) \cdot V_{l,s}(x) .$$

Soulignons que l'ensemble $\Sigma^{a,b}$ des résonances associées à $V_{l,s}^{a,b}$ dépend non seulement du potentiel V mais aussi, de façon essentielle, de la troncature $[a, b]$. Comme l'a noté *R.G. Newton* [28], une troncature brutale du potentiel ne permet pas d'obtenir des informations sur les singularités de la matrice de diffraction à partir des matrices associées aux potentiels tronqués. En revanche, nous montrons à la fin de cette section que les résonances peuvent être approchées si l'on amortit le potentiel avant de le tronquer.

On établit tout d'abord la convergence des opérateurs de diffraction:

THEOREME V.1 - Soient V et V_n des potentiels satisfaisant l'hypothèse (I.13) et S et S_n les opérateurs de diffraction qui leur sont respectivement associés par la formule (II.36); si $V_n \rightarrow V$ dans $L^1(\mathbb{R})$ quand $n \rightarrow \infty$, alors $S_n f \rightarrow S f$ dans \mathcal{H}_0 pour tout f dans \mathcal{H}_0 .

REMARQUE V.1 - Comme nous l'avons souligné dans la remarque III.1, l'hypothèse (I.13) sert à contruire les opérateurs d'onde W_{\pm} alors qu'il suffit que V soit dans $L^1(\mathbb{R})$ pour pouvoir définir l'opérateur de diffraction S par la formule (III.14); le théorème V.1 assure donc la continuité de l'application: $V \in L^1(\mathbb{R}) \rightarrow S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$.

Pour développer l'analogie en dimension 1 de la théorie élaborée par Lax-Phillips en dimension impaire supérieure ou égale à 3, on introduit pour $\rho \geq 1$ fixé, les espaces des champs sortants, D_+^ρ , et rentrants D_-^ρ :

$$(V.5) \quad D_+^\rho = \{ f \in \mathcal{H}_+, f|_{[-\rho, \rho]} = 0, f_1'(x) \pm f_2(x) = 0, \pm x \geq \rho \},$$

$$(V.6) \quad D_-^\rho = \{ f \in \mathcal{H}_+, f|_{[-\rho, \rho]} = 0, f_1'(x) \mp f_2(x) = 0, \pm x \geq \rho \},$$

où \mathcal{H}_+ est l'espace de Hilbert défini par (II.8) sous l'hypothèse

$$(V.7) \quad V \in L^\infty(\mathbb{R}), \quad |x| \geq \rho, V(x) = V_+(x) = V_-(x) = 0.$$

En posant

$$(V.8) \quad \mathcal{X}^\rho = \{ f \in \mathcal{H}_+, f_1'(x) = f_2(x) = 0, \pm x \geq \rho \},$$

on montre que \mathcal{H}_+ admet la décomposition en somme directe

$$(V.9) \quad \mathcal{H}_+ = D_+^\rho \oplus D_-^\rho \oplus \mathcal{X}^\rho ;$$

cette somme est orthogonale pour les formes E_+ , E_0 , et E ; on note P_\pm^ρ le projecteur sur $D_\pm^\rho \oplus \mathcal{X}^\rho$:

$$(V.10) \quad f \in \mathcal{H}_+, f = f_+^\rho + f_-^\rho + k^\rho, f_\pm^\rho \in D_\pm^\rho, k^\rho \in \mathcal{X}^\rho, P_\pm^\rho f = f_\pm^\rho + k^\rho.$$

On introduit alors l'opérateur Z^ρ

$$(V.11) \quad Z^\rho(t) = P_+^\rho U(t) P_-^\rho, \quad 0 \leq t.$$

THEOREME V.2 - On suppose que le potentiel V satisfait l'hypothèse (V.7).

i) $Z^\rho(t)$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur \mathcal{H}_+ qui invarie \mathcal{X}^ρ et vérifie:

$$(V.12) \quad \|Z^\rho(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_+)} \leq C e^{kt}, \quad t \geq 0,$$

$$(V.13) \quad E(Z^\rho(t) f) \leq E(f), \quad t \geq 0, f \in \mathcal{H}_+.$$

ii) $Z^\rho(t)$ est un opérateur compact pour $t \geq 2\rho$.

iii) Le spectre Σ^ρ de son générateur infinitésimal B^ρ se compose d'une infinité dénombrable de valeurs propres simples et on a :

$$(V.14) \quad \mu \in \Sigma^\rho \Leftrightarrow W(i\mu) = 0 ;$$

la fonction propre $f(x, \mu)$ associée est définie par :

$$(V.15) \quad \begin{cases} \pm x > \rho \Rightarrow f(x, \mu) = {}^t(f_+(\pm \rho, i\mu), 0) \\ |x| \leq \rho \Rightarrow f(x, \mu) = {}^t(f_+(x, i\mu), \mu f_+(x, i\mu)) \end{cases}$$

où $f_+(x, i\mu)$ est la fonction de Jost pour la fréquence $i\mu$ qui est une valeur propre, un état antiborné, une résonance ou le niveau virtuel nul.

Pour résoudre le problème mixte (V.1-2-3) (avec $a = -\rho$, $b = \rho$) on introduit l'espace \mathcal{H}_+^ρ :

$$(V.16) \quad \mathcal{H}_+^\rho = H^1(-\rho, \rho] \times L^2(-\rho, \rho]$$

muni de la norme :

$$(V.17) \quad E_+^\rho(f^\rho) = \int_{-\rho, \rho] \left| \frac{d}{dx} f_1^\rho \right|^2 + |f_2^\rho|^2 + [V_+(x) + \chi_{[0,1]}(x)] |f_1^\rho|^2 dx, \quad f^\rho = {}^t(f_1^\rho, f_2^\rho).$$

L'application de restriction I^ρ :

$$(V.18) \quad I^\rho : \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+^\rho, \quad f \in \mathcal{H}_+ \rightarrow I^\rho f = f|_{]-\rho, \rho]} \in \mathcal{H}_+^\rho$$

est une isométrie de \mathcal{H}^ρ sur \mathcal{H}_+^ρ .

On définit au sens des distributions sur $]-\rho, \rho[$, l'opérateur

$$(V.19) \quad A^\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -L_V & 0 \end{pmatrix}$$

et l'injection de Sobolev

$$(V.20) \quad n \geq 1, \quad H^n(-\rho, \rho] \hookrightarrow C^{n-1}(-\rho, \rho]$$

permet de spécifier le domaine :

$$(V.21) \quad D(A^\rho) = \{f^\rho \in \mathcal{H}_+^\rho ; A^\rho f^\rho \in \mathcal{H}_+^\rho ; (f_1^\rho)'(\pm \rho) \pm f_2^\rho(\pm \rho) = 0\}.$$

L'équivalence entre le formalisme de la membrane et la théorie du semi-groupe Z^ρ est exprimée par le :

THEOREME V.3 - L'opérateur A^ρ de domaine $D(A^\rho)$ engendre un semi-groupe $U^\rho(t)$ fortement continu sur \mathcal{H}_+^ρ et le diagramme suivant est commutatif

$$(V.22) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}^\rho & \xrightarrow{I^\rho} & \mathcal{H}_+^\rho \\ \downarrow Z^\rho(t) & & \downarrow U^\rho(t) \\ \mathcal{H}^\rho & \xrightarrow{I^\rho} & \mathcal{H}_+^\rho \end{array} \quad (t \geq 0)$$

Nous pouvons à présent décrire l'ensemble des résonances et obtenir une décomposition spectrale des solutions de l'équation (I.1) quand le potentiel est à support compact.

THEOREME V.4 - On suppose que le potentiel $V \neq 0$ vérifie (V.7). Alors le Wronskien $W(\sigma)$ donné par (I.8) est une fonction entière dont l'ensemble des zéros se compose :

i) d'un nombre au plus fini de valeurs propres $\sigma_j, -N \leq j \leq -1$, telles que :

$$(V.23) \quad -N \leq j \leq -1 \quad \text{Im } \sigma_j > 0, \quad \Re \sigma_j = 0 ;$$

ii) éventuellement du niveau virtuel nul :

$$(V.24) \quad \sigma_0 = 0 ;$$

$\sigma_j, -N \leq j \leq 0$, sont des zéros simples de W et si V est positif il n'y a ni valeur propre ni niveau virtuel nul;

iii) d'un ensemble infini dénombrable $\sigma_j, 1 \leq j$ d'états antibornés et de résonances :

$$(V.25) \quad 1 \leq j, \quad \text{Im } \sigma_j < 0,$$

qui vérifie :

$$(V.26) \quad \forall \gamma > 0, \quad \text{Card} \{ \sigma_j / \text{Im } \sigma_j \geq -\gamma \} < +\infty.$$

On ordonne les fréquences σ_j par partie imaginaire décroissante :

$$(V.27) \quad \text{Im } \sigma_{j+1} \leq \text{Im } \sigma_j.$$

Alors pour tout $n \geq -N, \varepsilon > 0, \rho > 0$, il existe $C(n, \varepsilon, \rho) > 0$, tel que pour tout $f = {}^t(f_1, f_2)$ dans \mathcal{H}_+ vérifiant :

$$(V.28) \quad \text{supp } f \subset [-\rho, \rho],$$

la solution Φ de l'équation (I.1) de données initiales

$$(V.29) \quad \Phi(0, x) = f_1(x), \quad \partial_t \Phi(0, x) = f_2(x)$$

satisfait pour $t \geq 0$

$$(V.30) \quad |\Phi(t, x) - \sum_{j=-N}^n e^{-i\sigma_j t} C_j f_+(x, \sigma_j)| \leq C(n, \varepsilon, \rho) \cdot (1+|x|)^{1/2} |e^{(-i\sigma_{n+1} + \varepsilon)t}|$$

où

$$(V.31) \quad C_j = \text{Résidu} \left(\frac{1}{W(\sigma)} \int_{\mathbb{R}} f_-(x, \sigma) (i\sigma f_1(x) - f_2(x)) dx ; \sigma = \sigma_j \right).$$

REMARQUE V.2 - L'existence d'une infinité de résonances pour l'équation de Schrödinger sur la demi-droite a été établie par Regge [28] [35] sous l'hypothèse superflue $V(x) \approx (x-\rho)^\lambda, 0 < \lambda, x \rightarrow \rho^-$. Nous établissons ce résultat sous la seule hypothèse (V.7) à l'aide des théorèmes de Hadamard, Paley-Wiener et Titchmarsh (voir aussi Zworski [38]).

REMARQUE V.3 - Les valeurs propres $(\sigma_j)_{-N \leq j \leq -1}$ n'apparaissent dans la formule asymptotique (V.30) que sous la forme des modes exponentiellement croissants

$$(V.32) \quad e^{-i\sigma_j t} f_+(x, \sigma_j);$$

les modes évanescents

$$(V.33) \quad e^{i\sigma_j t} f_+(x, \sigma_j), \quad t \geq 0$$

ne contribuent pas à la décomposition spectrale (V.30) de Φ même si la donnée initiale excite ce mode, i.e.

$$(V.34) \quad E(f, f_j^+) < 0, \quad f_j^+ = {}^t(f_+(\cdot, \sigma_j), i\sigma_j f_+(\cdot, \sigma_j)).$$

REMARQUE V.4- Si V est positif, l'estimation (V.30) assure une décroissance exponentielle de $\Phi(t)$ dominée par la partie imaginaire de la première résonance σ_1 .

Enfin nous justifions l'approximation par troncature dans l'étude des résonances. Etant donné un potentiel V et une partie E de \mathbb{C} , on note $\mathcal{R}(V, E)$ l'ensemble des résonances associées à V incluses dans E et pour $\varepsilon, \gamma > 0, a < b, V_{\gamma, \varepsilon}^{a, b}$ désigne le potentiel amorti et tronqué :

$$(V.35) \quad V_{\gamma, \varepsilon}^{a, b}(x) = \chi_{[a, b]}(x) \cdot e^{-\varepsilon|x|^\gamma} \cdot V(x).$$

THEOREME V.5 - On suppose que le potentiel V satisfait les hypothèses de courte portée (I.13) et d'analyticité (IV.2) et (IV.11). Alors pour tout $\eta > 0, \gamma > 1$, et tout compact K d'intérieur $\overset{\circ}{K}$ tel que :

$$(V.36) \quad K \subset \left\{ \sigma \in \mathbb{C}^*, -\frac{\pi}{2\gamma} < \text{Arg } \sigma < \pi + \frac{\pi}{2\gamma} \right\} \cup \left\{ \sigma \in \mathbb{C}, \text{Im } \sigma > -\frac{1}{2} \text{Min}(\alpha_-, \alpha_+) \right\},$$

il existe $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, il existe $A > 0, B > 0$ vérifiant :

$$(V.37) \quad \forall a < -A, \forall b > B, \text{Card } \mathcal{R}(V, \overset{\circ}{K}) = \text{Card } \mathcal{R}(V_{\gamma, \varepsilon}^{a, b}, \overset{\circ}{K})$$

$$(V.38) \quad \forall \sigma \in \mathcal{R}(V, \overset{\circ}{K}) \exists \sigma_{\gamma, \varepsilon}^{a, b} \in \mathcal{R}(V_{\gamma, \varepsilon}^{a, b}, \overset{\circ}{K}), \quad |\sigma - \sigma_{\gamma, \varepsilon}^{a, b}| < \eta;$$

Si K est inclus dans $\left\{ \sigma \in \mathbb{C}, \text{Im } \sigma > -\frac{1}{2} \text{Min}(\alpha_-, \alpha_+) \right\}$ on peut prendre $\varepsilon_0 = \varepsilon = 0$.

REMARQUE V.5 - Ce résultat basé sur le théorème d'Hürwitz, fonde l'approche par troncature de l'étude des résonances; il est malheureusement insuffisant pour assurer que $\mathcal{R}(V, \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^+)$ est non vide quoique pour tout $\gamma, \varepsilon, a, b$, l'ensemble $\mathcal{R}(V_{\gamma, \varepsilon}^{a, b}, \mathbb{C})$ soit infini.

VI - CALCUL DES RÉSONANCES PAR LA MÉTHODE DE PRONY

En 1795, R. Prony étudia dans [33] le problème de l'interpolation d'une fonction $f(t)$ par une somme d'exponentielles à exposants inconnus :

$$(VI.1) \quad f(t) = \sum_{j=1}^N C_j e^{-i\sigma_j t}, \quad 0 \leq t,$$

où les C_j sont non nuls et les σ_j distincts deux à deux ; l'algorithme de Prony permet de reconstruire les σ_j et C_j à partir de la fonction f supposée connue ; il comporte quatre étapes :

1°) La première étape consiste à déterminer le signal f et à l'échantillonner : on choisit un pas $\Delta T > 0$ et on pose :

$$(VI.2) \quad f_k = f(k \Delta T), \quad z_j = e^{-i\sigma_j \Delta T}.$$

L'équation (VI.1) donne un système d'équations polynomiales :

$$(VI.3) \quad \sum_{j=1}^N C_j (z_j)^k = f_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

2°) L'idée de Prony est de transformer les équations (VI.3) en un système d'équations aux différences : étant donné $M \geq N$, on résout le système linéaire surdéterminé :

$$(VI.4) \quad \alpha_N = 1, \quad \sum_{j=0}^N \alpha_j f_{j+m} = 0, \quad m = 0, \dots, M-1.$$

3°) On remarque que les X_j :

$$X_j = C_j \sum_{k=0}^N \alpha_k (z_j)^k, \quad j = 1, \dots, N,$$

sont solutions d'un système de Van der Monde

$$(VI.5) \quad \sum_{j=1}^N X_j z_j^m = \sum_{j=1}^N \alpha_j f_{j+m} = 0, \quad m = 0, \dots, M-1.$$

Donc $X_j = 0$ et les z_j recherchés sont les solutions de l'équation polynomiale :

$$(VI.6) \quad \sum_{k=0}^N \alpha_k z^k = 0.$$

4°) Ayant déterminé les racines z_j du polynôme (VI.6), les coefficients C_j sont obtenus en résolvant (VI.3).

La procédure de Prony a été utilisée avec succès en électromagnétisme (cf. par exemple [26], [27]) et en acoustique [24] [37] ; nous renvoyons à [37] pour une analyse détaillée de cette méthode. Son emploi pour le calcul des résonances d'un trou noir est légitimé par le théorème V.5 et la formule (V.30). Nous décrivons les approximations imposées par l'expérimentation

numérique. A priori les résonances σ_j associées au potentiel $V_{\ell,s}$, $\ell \geq s$ sont recherchées sous la forme approchée des résonances $\sigma_{\varepsilon,j}^{a,b}$ associées au potentiel amorti et tronqué :

$$(VI.7) \quad V_{\varepsilon}^{a,b}(x) = \chi_{[a,b]}(x) e^{-\varepsilon|x|^\gamma} V_{\ell,s}(x), \quad 1 < \gamma.$$

D'après le théorème V.4, une solution $\Phi_{\varepsilon}^{a,b}$ de l'équation (I.1) vérifie :

$$(VI.8) \quad \Phi_{\varepsilon}^{a,b}(t, x) = \sum_{j=1}^N C_j(x) e^{-i\sigma_{\varepsilon,j}^{a,b} t} + o(e^{-i\sigma_{\varepsilon,N}^{a,b} t}).$$

Pour $t \geq t_0 = t_0(x, N, \varepsilon, a, b)$ suffisamment grand, l'erreur $o(e^{-i\sigma_{\varepsilon,N}^{a,b} t})$ sera de l'ordre de la précision machine et ainsi la solution calculée $\hat{\Phi}_{\varepsilon}^{a,b}$ s'identifie à une somme finie d'exponentielles :

$$(VI.9) \quad \hat{\Phi}_{\varepsilon}^{a,b}(t, x) = \sum_{j=1}^N \hat{C}_j(x) e^{-i\hat{\sigma}_{\varepsilon,j}^{a,b} t}, \quad t \geq t_0,$$

où les \hat{C}_j et $\hat{\sigma}_{\varepsilon,j}^{a,b}$ seront les valeurs calculées de C_j et $\sigma_{\varepsilon,j}^{a,b}$. D'autre part, x étant fixé, pour $t \geq t_1$, $\hat{\Phi}_{\varepsilon}^{a,b}(t, x)$ sera aussi de l'ordre de la précision machine et donc le calcul de $\hat{\Phi}_{\varepsilon}^{a,b}(t, x)$ sera pertinent pour $t \in [0, t_1]$. Par ailleurs, $\hat{\Phi}_{\varepsilon}^{a,b}(t_1, x)$ est déterminé par les valeurs de $\hat{\Phi}_{\varepsilon}^{a,b}(t, x)$ dans le domaine de dépendance :

$$(VI.10) \quad \{(s, y), 0 \leq s \leq t_1, |y - x| \leq t_1 - s\}.$$

Donc, pour $a \leq x - t_1$, $b \geq x + t_1$, $\hat{\Phi}_{\varepsilon}^{a,b}(t, x)$ coïncide sur le domaine (VI.10) avec la solution calculée $\hat{\Phi}_{\varepsilon}$ de l'équation (I.1), de mêmes données initiales, et pour le potentiel

$$(VI.11) \quad V_{\varepsilon}(x) = e^{-\varepsilon|x|^\gamma} V_{\ell,s}(x).$$

Nous avons constaté numériquement que t_0 et t_1 peuvent être choisis indépendants de ε petit. Donc si ε est suffisamment petit, $V_{\varepsilon} - V$ sera de l'ordre de la précision machine et $\hat{\Phi}_{\varepsilon}$ coïncidera dans (VI.10) avec la solution calculée $\hat{\Phi}$ de l'équation (I.1) de mêmes données initiales associée au potentiel $V_{\ell,s}$. On est ainsi amené à considérer que la décomposition spectrale (I.10) est numériquement vérifiée pour les potentiels $V_{\ell,s}$.

On pose maintenant :

$$(VI.12) \quad f(t) = \hat{\Phi}(t_0 + t, x_0) = \sum_{j=1}^N \hat{C}_j(x) e^{-i\hat{\sigma}_j t}, \quad 0 \leq t \leq t_1 - t_0.$$

L'algorithme de Prony fournit alors les quantités calculées $\hat{\sigma}_j$ et \hat{C}_j qui approchent les N premières résonances et coefficients d'excitation. Comme nous l'avons souligné, on ne dispose pas d'estimations des erreurs commises, seule la comparaison avec les valeurs obtenues par d'autres méthodes assure que les $\hat{\sigma}_j$ calculées sont des approximations correctes des résonances ; cette remarque s'applique d'ailleurs à toutes les méthodes. En revanche, on teste aisément la fiabilité de la procédure de Prony : la table 1 donne les résultats du calcul des fréquences $\sigma_j = \alpha_j - i\beta_j = (\alpha_j, \beta_j)$ pour le signal

$$f(t) = \sum_{j=1}^3 e^{-i\sigma_j t} + e^{i\sigma_j^* t}.$$

	Valeur exacte	Valeur calculée
σ_1	0.747343, 0.177925	$0.74734302 \pm 2.10^{-8}, 0.17792502 \pm 2.10^{-8}$
σ_2	0.693422, 0.547830	$0.69341 \pm 2.10^{-5}, 0.54782 \pm 2.10^{-5}$
σ_3	0.602107, 0.956544	$0.6021 \pm 10^{-4}, 0.9566 \pm 10^{-4}$

table 1: test de la méthode de Prony.

Les valeurs calculées sont stables vis à vis du changement du pas d'échantillonnage ΔT (à une variation de $n10^{-m}$ près indiquée s'il y a lieu). Cette expérimentation (sur SPARK STATION SUN) met en évidence les avantages et les limitations de la méthode : les premiers pôles, *i.e.* ceux de partie imaginaire petite, sont calculés avec une excellente précision ; par contre, il est difficile d'obtenir les résonances σ_j d'indice élevé, *i.e.* de grande partie imaginaire, le signal $e^{-i\sigma_j t}$ étant trop rapidement évanescent.

Nous donnons maintenant quelques détails sur la mise en oeuvre numérique. L'équation (I.1) est écrite sous forme du système du premier ordre

$$(VI.13) \quad \begin{cases} (\partial_t + \partial_x) u = V\Phi, \\ (\partial_t - \partial_x) v = V\Phi, \\ \partial_t \Phi = 2^{-1}(u+v), \end{cases}$$

où

$$(VI.14) \quad u = (\partial_t - \partial_x) \Phi, \quad v = (\partial_t + \partial_x) \Phi,$$

complété par les conditions aux limites dissipatives associées à la troncature de V sur $[a, b]_x$ (conditions artificielles d'Engquist et Majda [13]):

$$(VI.15) \quad u(t, a) = v(t, b) = 0, \quad t \geq 0.$$

En fait Φ sera calculée dans le domaine (VI.10) où les points (x, t) sont non affectés par cette condition au bord, et nous constatons une décroissance exponentielle durant l'intervalle de calcul $[0, t_1] = [0, 160]$ au bout duquel la solution numérique se stabilise à une valeur très petite (voir le Corollaire II.1 et les Remarques II.3 et V.4).

Le système est résolu par un schéma aux différences finies avec des données initiales du type

$$(VI.16) \quad \begin{cases} \Phi(0, x) = 0, \\ \partial_t \Phi(0, x) = \lambda \{1 + \cos[\pi(x-x_0)/R]\} \text{ si } |x-x_0| \leq R, \\ \partial_t \Phi(0, x) = 0 \text{ si } |x-x_0| \geq R. \end{cases}$$

Afin que l'instant t_0 à partir duquel on identifie $\hat{\Phi}(t, x_0)$ à une somme d'exponentielles soit le plus petit possible, on choisit comme point d'observation et centre du support des données initiales, le point x_0 où le potentiel atteint son maximum, et l'amplitude λ et la taille R du support de façon à ce que $\partial_t \Phi(0, x)$ soit une impulsion brève; par exemple pour un pas de discrétisation $\Delta t = 10^{-3}$

$$(VI.17) \quad \lambda = 10^5, \quad R = 5\Delta t, \quad a = -40, \quad b = 120.$$

Dans la seconde étape on résoud le système surdéterminé (VI.4) sous la forme générale

$$(VI.18) \quad A_P X_P = B_P, \quad P \geq N,$$

où

$$X_P = {}^t(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{P-1}), \quad B_P = {}^t(f_P, f_{P+1}, \dots, f_{P+M-1}),$$

$$A_P = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{P-1} \\ f_1 & f_2 & \dots & f_P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{M-1} & f_M & \dots & f_{P+M-2} \end{bmatrix}.$$

La matrice circulante A_P est très mal conditionnée et ses valeurs singulières sont peu séparées; c'est dans cette étape qu'apparaît l'instabilité intrinsèque du calcul de résonances: une faible variation de B_P affecte profondément X_P , aussi le calcul de la solution Φ de (I.1) doit être extrêmement précis. On constate que la meilleure stabilité est obtenue pour

$$N \leq P \leq N + 4, \quad P \leq M \leq 5M/2.$$

L'équation (VI.18) est résolue par une méthode d'inverse généralisé (programme DSVDC de LINPACK).

Les étapes 3 et 4 ne posent pas de difficultés particulières; les racines du polynôme (VI.6) sont déterminées par la méthode de Müller; les coefficients C_j sont obtenus la méthode de Gauss (routines CGECO et CGESL de LINPACK).

Nous avons appliqué cette procédure pour le calcul des modes gravitationnels, électromagnétiques, scalaires. Les tables 2, 3, 4, donnent nos résultats obtenus par la méthode de Prony implantée sur CRAY 2 et les valeurs données par *S. Chandrasekar et S. Detweiler*

(C.D.) [7], *E. Leaver* [22], et *S. Iyer* (méthode W.K.B.) [17]. Les résonances $\sigma_j = \pm\alpha_j - i\beta_j = (\alpha_j, \beta_j)$ sont présentées avec toutes les décimales invariantes par des changements

- de la localisation de la donnée initiale $\Phi(0, x)$,
- de la taille R de son support,
- de son amplitude λ ,
- du point d'observation x_0 ,
- de l'instant initial d'observation t_0 ,
- du pas d'échantillonnage ΔT ,
- de la taille $M \times P$ de la matrice A_p .

Dans certains cas, une variation de $n10^{-m}$ est indiquée. La similitude avec les résultats de *E. Leaver* est d'autant plus frappante que les sources d'erreurs numériques des deux méthodes sont très différentes. Par ailleurs ces valeurs ont été récemment confirmées par *H.P. Nollert* et *B.G. Schmidt* [29] [30], utilisant une méthode stationnaire basée sur l'évaluation du Wronskien (I.8). Les troisièmes résonances de C.D. pour $s=2$, $l=3,4$, semblent être des artefacts numériques.

Prony	C.D.	Leaver	WKB
l=2			
0.74734349, 0.17792462	0.74734, 0.17792	0.747343, 0.177925	0.7464, 0.1784
0.69342, 0.54783	0.69687, 0.54938	0.693422, 0.547830	0.6920, 0.5498
0.60, 0.95		0.602107, 0.956554	0.6058, 0.9422
l=3			
1.198887042, 0.185406087	1.19889, 0.18541	1.198887, 0.185406	1.1986, 0.1854
1.165288, 0.562596	1.16402, 0.56231	1.165288, 0.562596	1.1648, 0.5628
1.1034±2.10 ⁻⁴ , 0.9598±2.10 ⁻⁴	0.85257, 0.74546	1.103370, 0.958186	1.1064, 0.9534
1.02, 1.38		1.023924, 1.380674	1.0314, 1.3548
l=4			
1.6183578804, 0.1883279128	1.61835, 0.18832	1.61836, 0.18833	1.6182, 0.1884
1.5932642, 0.5686687	1.59313, 0.56877	1.59326, 0.56867	1.5930, 0.5688
1.5455, 0.9598	1.12019, 0.84658	1.54542, 0.95982	1.5472, 0.9580
1.477±2.10 ⁻³ , 1.367±2.10 ⁻³		1.47967, 1.36785	1.4866, 1.3566

table 2: ondes gravitationnelles, $s=2$.

	Prony	Leaver	WKB
l=0	$0.22091 \pm 2.10^{-5}, 0.20980 \pm 2.10^{-5}$	0.2210, 0.2098	0.2092, 0.2304
l=1	0.58587233, 0.19531997	0.5858, 0.1954	0.5822, 0.1960
	0.529, 0.612	0.5290, 0.6126	0.5244, 0.6148
l=2	0.96728799, 0.19351754	0.9672, 0.1936	0.9664, 0.1936
	0.9277, 0.5912	0.9278, 0.5912	0.9264, 0.5916
	0.86, 1.02	0.8610, 1.0172	0.8634, 1.0068

table 3: champ scalaire, $s=0$.

	Prony	Leaver	WKB
l=1	0.49652657, 0.18497543	0.4966, 0.1850	0.4918, 0.1862
	0.430, 0.587	0.4290, 0.5874	0.4226, 0.5916
l=2	0.915191238, 0.190008843	0.9152, 0.1900	0.9142, 0.1902
	0.8730, 0.5814	0.8730, 0.5814	0.8716, 0.5820
	$0.804 \pm 2.10^{-3}, 1.003 \pm 2.10^{-3}$	0.8024, 1.0032	0.8046, 0.9918
l=3	1.313797950, 0.191232426	1.3138, 0.1912	1.3134, 0.1912
	1.28347, 0.57945	1.2834, 0.5794	1.2830, 0.5796
	1.227, 0.984	1.2276, 0.9842	1.2302, 0.9802

table 4: champ électromagnétique, $s=1$.

En conclusion, la méthode de Prony semble pouvoir assurer la meilleure précision de calcul des premières résonances; en revanche, du fait de la répartition spécifique des résonances σ_j d'un trou noir ($|Im \sigma_j| \rightarrow \infty, Re \sigma_j \rightarrow 0$), son efficacité paraît diminuer rapidement pour des ordres croissants.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] V. de Alfaro, T. Regge, *Potential Scattering*, North Holland, Amsterdam, 1965.
- [2] A. Bachelot, *Gravitational Scattering of electromagnetic field by Schwarzschild Black-Hole*, Ann.I.H.P. physique théorique. vol. 54, n°3, 1991, p. 261-320.
- [3] A. Bachelot, A. Motet-Bachelot, *Les résonances d' un trou noir de Schwarzschild*, Ann.I.H.P. physique théorique. vol. 59, n°1, 1993, p. 3-68.
- [4] N.G. De Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis*, Dover, New York, 1981.
- [5] S. Chandrasekar, *The mathematical theory of black-holes*, Oxford University Press, New-York, 1983.
- [6] S. Chandrasekar, *On algebraically special perturbations of black holes*, Proc. R. Soc. Lon. A 392, 1984, p.1-13.
- [7] S. Chandrasekar, S. Detweiler, *The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole*, Proc. R. Soc. Lond. A 344, 1975, p.441-452.
- [8] T. Damour, *Black-Hole eddy currents*, Phys. Rev. D. 18, 10, 1978, p.3598-3604.
- [9] T. Damour, *Thèse de Doctorat d'Etat*, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1979.
- [10] T. Damour, *in Proceedings of the Second Marcel Grossman Meeting on General Relativity*, Ruffini Edt, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [11] P. Deift, E. Trubowitz, *Inverse Scattering on the Line*, Comm. Pure Appl.Math. 32, 1979, p.121-251.
- [12] J. Dimock, *Scattering for the wave equation on the Schwarzschild metric*, Gen. Rel. Grav. 17, 4, 1985, p.353-369.
- [13] B. Engquist, A. Majda, *Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations*, Comm. Pure Appl. Math. 32, 1979, p.313-357.

- [14] V. Ferrari, B. Mashhoon, *New approach to the quasinormal modes of a black hole*, Phys. Rev. D 30, 2, 1984, p.295-304.
- [15] J.W. Guinn, Y. Kojima, B.F. Schutz, *High-overtone normal modes of Schwarzschild black holes*, Class. Quantum Grav. 7, 1990, p.47-53.
- [16] J. B. Hartle, D.C. Wilkins, *Analytic Properties of the Teukolsky Equation*, Comm. Math. Phys. 38, 1974, p.47-63.
- [17] S. Iyer, *Black-hole normal modes: a WKB approach II; Schwarzschild black holes*, Phys. Rev D 35, 12, 1987, p.3632-3636.
- [18] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Verlag, New York, 1966.
- [19] K.D. Kokkotas, *Normal modes of the Kerr black hole*, Class. Quantum Grav., 8, 1991, p.2217-2224.
- [20] P. Lax, R. Phillips, *Scattering Theory*, Academic Press, New-York, nouvelle édition 1989.
- [21] E. Leaver, *Spectral decomposition of the perturbation response of the Schwarzschild geometry*, Phys. Rev. D 34, 2 1986, p.384-408.
- [22] E. Leaver, *An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes*, Proc. R. Soc. Lond. A 402, 1985, p.285-298.
- [23] D.A. Mac Donald, R.H. Price, K.S. Thorne, *Black-Holes : The Membrane Paradigm*, Yale University Press, New-Haven, London, 1986.
- [24] G. Majda, W. Strauss, M. Wei, *Numerical Computation of the Scattering Frequencies for Acoustic Wave Equations*, Comput. Phys. 75, 2, 1988, p.345-358.
- [25] B. Majumdar, N. Panchapakesan, *Schwarzschild black-hole normal modes using the Hill determinant*, Phys. Rev. D 40, 1989, p.2568-2571.
- [26] E.K. Miller, R. Mittra, A.J. Poggio, M.L. Van Blaricum, *Evaluation of a Processing Technique for Transient Data*, IEEE Trans. Antennas Propagat. 36, 1, 1978, p.165-173.

- [27] R. Mittra, M.L. Van Blaricum, *A Technique for Extracting the Poles and Residues of a System Directly from Its Transient Response*, IEEE Trans. Antennas Propagat. 23, 6, 1975, p.777-781.
- [28] R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [29] H.P. Nollert, *Doktorarbeit*, Universität Tübingen, 1991.
- [30] H.P. Nollert, B.G. Schmidt, *Quasi-Normal Modes of Schwarzschild Black-Holes-Defined and Calculated via Laplace Transformation*, preprint, 1992.
- [31] R. Phillips, *Scattering Theory for the Wave Equation with a Short Range Perturbation II*, Indiana Univ. Math. J., 33, 6, 1984, p.831-846.
- [32] R.H. Price, Y. Sun, *Excitation of quasinormal ringing of a Schwarzschild black hole*, Phys. Rev. D 38, 4, 1988, p.1040-1052.
- [33] R. Prony, *Essai expérimental et analytique sur les lois de la dilatabilité de fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alcool à différentes températures*, J. de l'Ecole Polytechnique, vol.1, cahier 2, 1795, p.24-76.
- [34] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, Vol. III, 1979, Vol. IV, 1978, Academic Press.
- [35] T. Regge, *Analytic Properties of the Scattering Matrix*, Il Nuovo Cimento, 8, 5, 1958, p.671-679.
- [36] M. Schechter, *Operator Methods in Quantum Mechanics*, North Holland, New York, Oxford, 1981.
- [37] M. Wei, *Numerical Computation of Scattering Frequencies*, Ph.D. thesis, Dept. of Applied Math., Brown Univ., Providence, RI, 1986.
- [38] M. Zworski, *Distribution of poles for scattering on the real line*, J. Func. Anal., vol.73, 1987, p.277-296.