DISVE Pôle Licence	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2011/2012** **SESSION 1 DE PRINTEMPS** **Parcours : CPBX, PC écoles** **Epreuve : Analyse** **Code UE : CP402** **Date : mardi 31 Mai 2012** **Heure : 14h** **Durée : 1h30** **Lieu : A22, Amphithéâtre Wegener** Documents : Non autorisés. Epreuve de : **A. Bachelot**	

Exercice 1. On pose pour $t > 0$:

$$F(t) = \int_{]0,\infty[} \frac{e^{-tx} - e^{-2x}}{x} dx.$$

1 Montrer que $F(t)$ est bien définie.

□ En zéro la fonction est équivalente à $2 - t$ et à l'infini sa valeur absolue est majorée par e^{-ax}, $a = \min(2, t)$.

■

2 Montrer que $F \in C^1(]0, \infty[)$.

□ On applique le théorème de dérivation en notant que pour $t \in [\alpha, \infty[$, $0 < \alpha$, on a

$$\left| \partial_t \left(\frac{e^{-tx} - e^{-2x}}{x} \right) \right| = \mid -e^{-tx} \mid \leq e^{-\alpha x}$$

donc $F \in C^1([\alpha, \infty[)$.

■

3 Calculer F'. En déduire F.

□

$F'(t) = -1/t$, $F(t) = -\log(t) + C$, $F(2) = 0$, $F(t) = \log(2/t)$.

■

Exercice 2.

Pour $R > 0$, on pose $D_R = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$, $K_R = \{(x, y);\ \mid x \mid \leq R,\ \mid y \mid \leq R\}$.

a Calculer $\int_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy$.

□

On passe en coordonnées polaires et on trouve $\pi \left(1 - e^{-R^2}\right)$.

■

b En comparant $\int_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy$, $\int_{K_R} e^{-x^2-y^2} dxdy$ et $\int_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dxdy$, donner un encadrement de $\int_0^R e^{-x^2} dx$.

□

$$\int_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int_{K_R} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

et donc $\pi \left(1 - e^{-R^2}\right) \leq 4 \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 \leq \pi \left(1 - e^{-2R^2}\right)$

■

c En déduire que la valeur de

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

□

on fait $R \to \infty$ et on trouve $\sqrt{\pi}/2$.

■

Exercice 3.

On définit

$$K = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ 0 \leq z,\ x+y+z \leq 1\Big\}.$$

Calculer

$$\iiint_K \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dxdydz.$$

□

$-5/16 + \log(2)/2$

■

Exercice 4.

1 Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f définie sur $\mathbb{R}$, dont la restriction à $[-\pi, \pi[$ est donnée par $f(x) = e^x$.

□

$c_n(f) = \dfrac{(-1)^n \sinh \pi}{\pi(1-in)}$

2 Enoncer le théorème de Parseval et le théorème de Dirichlet.

3 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}.$$

□

On applique le théorème de Dirichlet : en 0 et on trouve $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1\right)$ et en π et on trouve $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{1}{2}\left(\pi\frac{\cosh \pi}{\sinh \pi} - 1\right)$.

■

FIN