

DISVE Pôle Licence	ANNEE UNIVERSITAIRE 2009/20010 SESSION 1 DE PRINTEMPS
	Parcours : CPBX, PC écoles Epreuve : Analyse 2 Code UE : CPI 426 Date : 25 Mai 2010 Heure : 8h30 Durée : 1h30 Lieu : A22, Amphithéâtre Wegener Documents : Non autorisés. Epreuve de : A. Bachelot

Exercice 1.

- 1 Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{1+t^2}{1+t^4} dt$$

est convergente.

Continue et équivalente à $1/t^2$ à l'infini.

blacksquare

- 2 Calculer sa valeur à l'aide du changement de variable $x = t - \frac{1}{t}$ dont on justifiera l'emploi.

$t \mapsto x$ est strictement croissante. $dx = \frac{1+t^2}{t^2} dt$, $I = \pi/\sqrt{2}$.

■

Exercice 2.

- 1 Montrer que la fonction

$$f(t) = \frac{t \log t}{(1+t^2)^2}$$

est intégrable sur $[1, \infty[$.

Continue et majorée par $1/t^2$ à l'infini.

■

- 2 En utilisant une intégration par partie, calculer

$$\int_1^{\infty} \frac{t \log t}{(1+t^2)^2} dt.$$

$\ln 2/4$

■

Exercice 3.

A l'aide d'un changement de variables, calculer

$$\iint_D x^2 y dx dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x - y \leq 2, -1 \leq x + 3y \leq 3\}$$

$$u = x - y, v = x + 3y, I = -17/256.$$

■

Exercice 4.

Soit $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Calculer

$$\iiint_K xyz dx dy dz.$$

□

Changement de variables en coordonnées sphériques. $I = 1/48$

■

Exercice 5.

1 Calculer les coefficients de Fourier de la fonction 2π -périodique f définie sur \mathbb{R} , dont la restriction à $[-\pi, \pi[$ est donnée par $f(x) = x$.

□

$$c_0 = 0, c_n = \frac{(-1)^n i}{n}.$$

■

2 Enoncer le théorème de Parseval et le théorème de Dirichlet.

3 Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

□

Parseval : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$, Dirichlet en $\pi/2$: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \pi/4$.

■

FIN