université de BORDEAUX

Collège Sciences et Technologie
UF mathématiques et interactions

Session de printemps 2017

MASTER Analyse EDP Probabilités

UE 4TMS801 : Equations aux dérivées partielles 2
cours d'Alain BACHELOT
mercredi 3 mai 2017 - Amphi B18, bâtiment B18 - 9H-12H.
-épreuve de 3 heures - tous les documents sont autorisés -
La qualité de l'argumentation et la clarté de la rédaction seront prises en compte.

Les exercices sont indépendants.

I

En mécanique quantique relativiste, le boson de Higgs est décrit par une fonction d'onde $u(t,x)$ solution de l'équation de Klein-Gordon

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u + m^2 u = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{I.1}$$

où Δ_x désigne le Laplacien sur $\mathbb{R}^3_x$ et $m > 0$ est la masse du boson. Pour $\xi \in \mathbb{R}^3$ on note

$$[\xi] := (m^2 + \mid \xi \mid^2)^{\frac{1}{2}}.$$

(1) Montrer que si $f \in H^s(\mathbb{R}^3)$, $s \in \mathbb{R}$, la quantité

$$\|f\|_s := \left(\int_{\mathbb{R}^3} [\xi]^{2s} \mid \hat{f}(\xi) \mid^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

définit une norme équivalente à la norme usuelle de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3)$.

(2) Montrer que si $u \in C^0(\mathbb{R}_t; H^{s+1}(\mathbb{R}^3_x)) \cap C^1(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}^3_x))$ est solution de (I.1) alors la quantité

$$E_{s-1}(u,t) := \|\partial_t u(t,.)\|^2_{s-1} + \|u(t,.)\|^2_s$$

ne dépend pas de $t \in \mathbb{R}$.

Dans la suite on se donne $f \in H^{s+1}(\mathbb{R}^3)$ et $g \in H^s(\mathbb{R}^3)$.

(3) Montrer qu'il existe un unique $u \in C^0(\mathbb{R}_t; H^{s+1}(\mathbb{R}^3_x)) \cap C^1(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}^3_x))$ solution de (I.1) et satisfaisant $u(0,x) = f(x)$, $\partial_t u(0,x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$.

(4) Montrer que $E_s(u,t)$ ne dépend pas de t.

(5) Montrer qu'il existe $F, G \in L^1([0,\infty[)$ tels que

$$\|\partial_t u(t,.)\|_s^2 - \|u(t,.)\|_{s+1}^2 = \int_0^\infty \sin(t\rho)F(\rho) + \cos(t\rho)G(\rho)d\rho.$$

(6) En déduire que $\|\partial_t u(t,.)\|_s$ et $\|u(t,.)\|_{s+1}$ admettent une limite commune que l'on déterminera quand $\mid t \mid \to \infty$ (on pourra utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue sur la transformée de Fourier des fonctions L^1).

(7) Dans cette question on suppose que $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Montrer que pour tout $R > 0$, $T \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_{|x|\le R} \mid \partial_t u(T,x) \mid^2 + \mid \nabla_x u(T,x) \mid^2 + m^2 \mid u(T,x) \mid^2 dx$$
$$\le \int_{|x|\le R+|T|} \mid g(x) \mid^2 + \mid \nabla_x f(x) \mid^2 + m^2 \mid f(x) \mid^2 dx.$$

(8) En déduire que pour tout $f, g \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $f = g = 0$ pour $\mid x \mid > R$, il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que l'équation (I.1) admet une unique solution $u \in C^0(\mathbb{R}_t; H^{s+1}(\mathbb{R}_x^3)) \cap C^1(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}_x^3))$ satisfaisant $u(0,x) = f(x)$, $\partial_t u(0,x) = g(x)$, et $u(t,x) = 0$ pour $\mid x \mid > \mid t \mid + R$.

II

Dans cet exercice, toutes les fonctions sont à valeur réelle et les espaces vectoriels sont réels.

Soient

$$\omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 < \sqrt{x^2+y^2} < 2\},\ \ \Omega = \omega \times \mathbb{R}_z,$$
$$\gamma_j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{x^2+y^2} = j\},\ \ \Gamma_j = \gamma_j \times \mathbb{R}_z,$$
$$V = \{u \in H^1(\omega);\ (x,y) \in \gamma_1 \Rightarrow u(x,y) = 0\},$$
$$W = \{u \in H^1(\Omega);\ (x,y,z) \in \Gamma_1 \Rightarrow u(x,y,z) = 0\},$$

et $q \in L^\infty(\Omega)$, $0 \le q$.

On considère le modèle de propagation d'ondes dans un guide coaxial hétérogène :

(II.1) $$\partial_t^2 u - \Delta u + qu = 0 \ \ dans\ \ \mathbb{R}_t \times \Omega,$$

(II.2) $$u = 0 \ \ sur\ \ \mathbb{R}_t \times \Gamma_1,$$

(II.3) $$\partial_\nu u = 0 \ \ sur\ \ \mathbb{R}_t \times \Gamma_2,$$

(II.4) $$u(0,x,y,z) = f(x,y,z),\ \ \partial_t u(0,x,y,z) = g(x,y,z) \ \ dans\ \ \Omega.$$

(1) Montrer que W est un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$.

(2) Montrer par un raisonnement par l'absurde qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in V$, $\|u\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}$. En déduire le même résultat pour W.

(3) On introduit l'espace $X = W \times L^2(\Omega)$ muni de la norme
$$\|(u,v)\|_X^2 = \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 + q \mid u \mid^2 + \mid v \mid^2 \; dxdydz.$$
Déduire des résultats précédents que X est un espace de Hilbert.

(4) On définit l'opérateur
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - q & 0 \end{pmatrix}, \quad D(A) = \left\{(u,v) \in X;\ \Delta u \in L^2,\ \partial_\nu u = 0 \ sur\ \Gamma_2, \quad v \in W\right\}.$$
Montrer que pour tout $(u,v) \in D(A)$, on a $\left\langle A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle_X = 0$.

(5) Montrer $(A, D(A)$ et $(-A, D(A))$ sont des opérateurs maximaux dissipatifs de domaine dense sur X.

(6) Montrer que pour tout $(f,g) \in D(A)$ il existe un unique $u \in C^2(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}_t; W)$ tel que $\Delta u \in C^0(\mathbb{R}_t; L^2(\Omega))$, et u est solution du problème (II.1), (II.2), (II.3), (II.4).

(7) Détailler une stratégie de résolution du problème (II.1), (II.2), (II.3), (II.4) dans le cas où q est de signe quelconque.