logo.jpg

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2016-2017
CPBX PC Ecole Semestre 4 - UE N1CP402D
Devoir surveillé d'Analyse.
Date : Mercredi 17 mars 2017 **Heure :** 14h.-15h30. **Durée :** 1h30 - *Sans document.*

Collège Sciences et technologie

Exercice 1.

Soit $f \in C^0([a,b];E)$. Montrer que si $\int_a^b \|f(t)\| dt = 0$, alors $f = 0$. Que peut-on dire quand $f \in CM([a,b];E)$?

Exercice 2.

1. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2} dt.$$

2. Montrer que la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+nk+k^2}$$

admet une limite, que l'on déterminera, quand n tend vers l'infini.

Exercice 3.

Soit $R \in [0,1[$.

1. Montrer que pour tout $t \in [0,R]$ et tout N entier, on a

$$0 \leq \frac{1}{1-t^2} - \sum_{k=0}^N t^{2k} \leq \frac{t^{2N+2}}{1-R^2}.$$

2. En déduire que l'on a

$$0 \leq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+R}{1-R}\right) - \sum_{k=0}^N \frac{R^{2k+1}}{2k+1} \leq \frac{R^{2N+3}}{(1-R^2)(2N+3)}.$$

3. Comment peut-on calculer facilement une approximation de $\ln 3$ avec deux chiffres exacts après la virgule ?

Exercice 4.

1. Montrer que l'intégrale

$$I := \int_1^\infty \frac{1+t^2}{1+t^4} dt$$

est convergente.

2. Calculer sa valeur à l'aide de changements de variable (on pourra poser $x = t - \frac{1}{t}$).

Exercice 5.

1. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

est convergente.

2. Montrer que la fonction $\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ n'est pas intégrable sur $[\pi, \infty[$.