DISVE
Pôle Licence

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2011-2012

CPBX PC Ecole Semestre 4 - CPI 426 - Devoir surveillé d'Analyse.

Date : Mercredi 4 avril 2012 **Heure :** 14h.-15h30. **Durée :** 1h30

Lieu : bâtiment A22, amphithéâtre Poincaré.

Documents non autorisés. Aucun matériel électronique n'est autorisé.

Exercice 1.

[Question de cours] Soit $f \in C^0([a,b];E)$. Montrer que si $\int_a^b \|f(t)\| dt = 0$, alors $f = 0$. Ce résultat est-il encore vrai pour $f \in CM([a,b];E)$?

Exercice 2.

1. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^2} dt.$$

2. Montrer que la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+nk+k^2}$$

admet une limite, que l'on déterminera, quand n tend vers l'infini.

Exercice 3.

Soit $f \in C^0([a,b];E)$. On suppose qu'il existe $\alpha \in]0,1]$ et $C > 0$ tels que pour tout $x, y \in [a,b]$ on ait

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C \mid x - y \mid^{\alpha} .$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a

$$\left\| \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right\| \leq \frac{C}{\alpha+1} \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{n^{\alpha}}.$$

Exercice 4.

Soit $f_n(x) = \frac{n}{n^2x^2-2nx+2}$. Montrer que $f_n \in C^0([0,1]$. Etudiez, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $\lim_{n\to\infty} \| f_n \|_\infty$, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 5.

Soit $f(t) = \frac{\sin(t)}{\ln(1+t)}$.

1. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$.

2. Montrer que l'intégrale généralisée de f sur $[1,\infty[$ est convergente.

3. Montrer que f n'est pas intégrable sur $[1,\infty[$.

FIN

Le corrigé sera en ligne sur

http ://www.math.u-bordeaux1.fr/∼bachelot/enseignement.html