ANNÉE UNIVERSITAIRE 2009-2010

CPBX PC Ecole Semestre 4 - Devoir surveillé d'Analyse.

Date : Vendredi 5 mars 2010 **Heure : 14h.-15h30.** **Durée :** 1h30

DISVE
Pôle Licence

Lieu : bâtiment B5, grand amphithéâtre de biologie animale.

Documents non autorisés. La calculette homologuée par l'Université est le seul matériel électronique autorisé.

Exercice 1.

Indiquez pour chaque énoncé suivant s'il est VRAI ou FAUX. Dans ce dernier cas, donner un contre-exemple et modifier l'énoncé pour qu'il devienne vrai.

1. Toute fonction $f \in CM([a,b];E)$ vérifiant $\int_a^b \parallel f(t) \parallel dt = 0$ est identiquement nulle.
2. La dérivée d'une fonction C^1 par morceau sur $[a,b]$, est prolongeable en une fonction continue par morceau sur $[a,b]$.
3. Pour toute fonction f qui soit C^1 par morceau sur $[a,b]$ et tout $x, y \in [a,b]$, on a $f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)dt$.

Exercice 2.

En utilisant une somme de Riemann, montrer que

$$\sum_{i=n}^{i=2n} \frac{1}{i}$$

admet une limite, que l'on déterminera, quand n tend vers l'infini.

Exercice 3.

1. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2} dt.$$

2. Montrer que la suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 - nk + k^2}$$

admet une limite, que l'on déterminera, quand n tend vers l'infini.

Exercice 4.

1. Calculer

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

2. Montrer que pour tout $t \geq 0$ et N entier, on a

$$\left| \frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{N} (-1)^k t^{2k} \right| \leq t^{2N+2}.$$

(ça continue au verso !)

3. En déduire que pour tout $a \geq 0$ on a

$$\left| \arctan a - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{2k+1} a^{2k+1} \right| \leq \frac{a^{2N+3}}{2N+3}.$$

4. Montrer que pour tout entier N on a :

$$\left| \pi - 2 \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{1}{4^k} + \frac{2}{3} \frac{1}{9^k} \right) \right| \leq \frac{1}{(2N+3)4^N}.$$

FIN