C. R. Acad. Sci. Paris, t. 333, Série I, p. 1065–1068, 2001
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*
(Physique mathématique/*Mathematical Physics*)

# Diffusion des ondes par une violation de la causalité

**Alain BACHELOT**

**Institut de mathématiques, Université Bordeaux-1, UMR CNRS 5466, 351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France**
**Courriel : bachelot@math.u-bordeaux.fr**

**(Reçu le 19 octobre 2001, accepté le 5 novembre 2001)**

**Résumé.** On considère une classe de variétés lorentziennes de dimension quatre, admettant des courbes fermées de type nul ou de genre temps. On étudie quelques problèmes globaux pour l'équation des ondes : problème de Cauchy global et complétude asymptotique des opérateurs d'onde pour des métriques chronologiques mais non causales ; unicité de la solution avec données spécifiées sur une hypersurface de type changeant ; existence d'états résonants ; diffusion par une violation de la chronologie ; pôles de la matrice de diffusion. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

### *Scattering of the waves by a causality violation*

**Abstract.** *We introduce a class of four dimensional Lorentzian manifolds with closed curves of null type or timelike. We investigate some global problems for the wave equation: global Cauchy problem and asymptotic completeness of the wave operators for the chronological but non-causal metrics; uniqueness of solution with data on a changing type hypersurface; existence of resonant states; scattering by a violation of the chronology; poles of the scattering matrix.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

L'étude de l'équation des ondes est bien avancée dans le cas des variétés globalement hyperboliques [4]. Cette hypothèse est pourtant très forte et non satisfaite pour d'importants espaces-temps de la relativité générale, car la non linéarité des équations d'Einstein peut engendrer des géodésiques *fermées* de genre temps (univers de Gödel, solution de Van Stockum, trou noir de Kerr). Nous considérons une classe d'univers axisymmétriques « en rotation », $\mathcal{M} = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x = \mathbb{R}_t \times S^1_\varphi \times [0,\infty[_r \times \mathbb{R}_z$ munis d'une métrique de type Papapetrou,

$$g_{\mu,\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}t^2 - \left[r^2 - C^2(r,z)\right]\mathrm{d}\varphi^2 - 2C(r,z)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\varphi - \mathrm{d}r^2 - \mathrm{d}z^2, \tag{1}$$

avec $C \in \mathrm{C}^2_0(]0,\infty[_r \times \mathbb{R}_z)$. $(\mathcal{M}, g)$ est temporellement orientée par le champ de vecteurs de Killing $\partial_t$ et possède les mêmes propriétés que les espaces-temps cités plus haut, du point de vue de la causalité. En particulier quand $C > r$, la dérive des cones de lumière est si prononcée que des courbes temporelles fermées apparaissent : la coordonnée $\varphi \in S^1$ est de genre temps. On introduit

$$\mathbb{T} = \{x;\ C(r,z) > r\}, \quad \Sigma = \{x;\ C(r,z) = r > 0\}, \quad M_t = \{t\} \times \mathbb{R}^3_x. \tag{2}$$

**Note présentée par Jean-Michel BONY.**

S0764-4442(01)02193-0/FLA

$(\mathcal{M}, g)$ est globalement hyperbolique si et seulement si $\Sigma = \emptyset$. Dans ce cas $M_t$ est une hypersurface de Cauchy pour l'équation des ondes

$$|\det g|^{-1/2}\partial_\mu(|\det g|^{1/2}g^{\mu,\nu}\partial_\nu)u = \left(1 - \frac{C^2}{r^2}\right)\partial_t^2 u - \Delta_x u - 2\frac{C}{r^2}\partial_t\partial_\varphi u = 0, \tag{3}$$

et la théorie de la diffusion se déduit de [5]. Quand $\Sigma \neq \emptyset$, il n'existe aucune hypersurface de niveau dans $\mathcal{M}$ pour laquelle (3) soit hyperbolique. Nous montrons néanmoins l'existence de solutions globales asymptotiquement libres. Le cadre fonctionnel est suggéré par l'existence d'une énergie formellement conservée :

$$E_C(u) := \int_{\mathbb{R}^3} \left(1 - \frac{C^2}{r^2}\right)\left|\partial_t u(t,x)\right|^2 + \left|\nabla_x u(t,x)\right|^2 \mathrm{d}x. \tag{4}$$

On introduit l'espace $\mathcal{E}$ des solutions $u \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}_t; \mathrm{W}^1(\mathbb{R}^3_x))$ de (3) satisfaisant $\partial_t u \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}_t; \mathrm{L}^2_C)$, où $\mathrm{W}^1$ désigne l'espace de Beppo–Levi et $\mathrm{L}^2_C = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3_x, |1 - C^2 r^{-2}|\,\mathrm{d}x)$. Nous étudions la théorie de la diffusion pour (3), par ordre de gravité croissant de la violation de la causalité.

## 1. Violation causale et chronologie respectée : $\Sigma \neq \emptyset$, $\mathbb{T} = \emptyset$

$(\mathcal{M}, g)$ est alors chronologique mais non causale : il n'existe pas de courbe fermée de genre temps, mais il existe une géodésique nulle fermée. $M_t \cap \Sigma$ est caractéristique et $M_t$ est faiblement de type espace au sens de L. Hörmander qui a étudié le problème de Cauchy dans un cadre globalement hyperbolique [7]. Quoique $(\mathcal{M}, g)$ ne le soit pas, le problème de Cauchy est encore bien posé. L'énergie étant positive, on peux identifier une solution avec sa donnée à $t = 0$ dans l'espace $\mathcal{H} = \{(u(0), \partial_t u(0));\ u \in \mathcal{E}\}$, normé par $\|u\|_{\mathcal{E}} = \|(u(0, \partial_t u(0))\|_{\mathcal{H}} = E_C^{1/2}(u)$.

THÉORÈME 1. – *$(\mathcal{H}, \|.\|_{\mathcal{H}})$ est un espace de Hilbert qui contient $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3_x \setminus \Sigma) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3_x \setminus \Sigma)$. Si $\Sigma$ est Lebesgue-négligeable dans $\mathbb{R}^3_x$, alors $\mathcal{H} = \mathrm{W}^1(\mathbb{R}^3_x) \times \mathrm{L}^2_C$.*

Le caractère chronologique de $\mathcal{M}$ permet de développer une théorie *à la* Lax–Phillips et de comparer (3) avec l'équation des ondes dans l'espace-temps de Minkowski :

$$\partial_t^2 u - \Delta_x u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^3, \tag{5}$$

dont on note $\mathcal{E}_0$ l'espace des solutions d'énergie finie, $E_0(u) = \int_{\mathbb{R}^3} |\partial_t u|^2 + |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x = \|u\|^2_{\mathcal{E}_0}$, et $\mathcal{E}_0^\infty$ l'ensemble des solutions paquets d'onde réguliers (i.e. $\hat{u}(t,\xi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3_\xi \setminus \{0\})$).

THÉORÈME 2. – *Étant donné $u \in \mathcal{E}$, il existe un unique $u^{+(-)} \in \mathcal{E}_0$ satisfaisant*

$$E_C\big(u(t) - u^{+(-)}(t)\big) \longrightarrow 0, \quad t \to +(-)\infty. \tag{6}$$

*Les opérateurs d'onde $\Omega^{+(-)} : u \mapsto u^{+(-)}$ sont des isométries de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}_0$. L'opérateur de diffusion $S : u^- \mapsto u^+$ est un opérateur unitaire causal (au sens de* [3]*) sur $\mathcal{E}_0$, et qui invarie $\mathcal{E}_0^\infty$.*

On remarque que l'opérateur de diffusion par une violation de la causalité ($\Sigma \neq \emptyset$) est causal : la raison en est que la chronologie est respectée ($\mathbb{T} = \emptyset$). C'est aussi une conséquence de l'analyticité de la matrice de diffusion dans le demi-plan complexe $\Im k < 0$.

## 2. Violation chronologique : $\mathbb{T} \neq \emptyset$

$(\mathcal{M}, g)$ est alors totalement vicieux, i.e. pour tout $m_0, m_1 \in \mathcal{M}$, il existe une courbe future de genre temps, joignant $m_0$ à $m_1$. $M_t \cap (\mathbb{R}^3_x \setminus (\mathbb{T} \cup \Sigma))$ est spatiale, $M_t \cap \Sigma$ est caractéristique, $M_t \cap \mathbb{T}$ est de genre temps. $E_C(u)$ n'est pas définie positive, et la régularité a priori de $\partial_t u$ n'est pas claire. Pour étudier des solutions peu régulières en évitant la situation dégénérée où $\Sigma$ est d'intérieur non vide, on introduit une notion de « non capture » : $\Sigma$ est dite *non confinante* s'il n'existe pas de géodésique nulle incluse dans $[-T,+T]\times\Sigma$ pour un certain $T>0$ ; pour cela, il est nécessaire et suffisant que $(\partial_r C, \partial_z C)\neq(1,0)$ en tout point de $\Sigma$, et dans ce cas $\mathbb{T}\neq\emptyset$ et $\partial\mathbb{T}=\Sigma$. En utilisant les résultats de propagation des singularités [2], on obtient un résultat de régularité.

THÉORÈME 3. – *On suppose que $\Sigma$ est non confinante. Alors toute solution $u\in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t;\mathrm{W}^1(\mathbb{R}^3_x))$ de* (3) *satisfait*

$$u\in \mathrm{C}^0\big(\mathbb{R}_t;\mathrm{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3_x)\big),\quad \partial_t u\in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}\big(\mathbb{R}_t;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3_x)\big),\quad \left(1-\frac{C}{r}\right)\partial_t u\in \mathrm{C}^0\big(\mathbb{R}_t;\mathrm{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3_x)\big). \tag{7}$$

On peut alors considérer le problème de l'unicicité, pour des données sur l'hypersurface de type changeant $M_t$, ou pour une condition rentrante.

THÉORÈME 4. – *On suppose que $\Sigma$ est non confinante. Soit $u\in \mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_t;\mathrm{W}^1(\mathbb{R}^3_x))$ de* (3) *satisfaisant l'une des deux conditions suivantes :*

$$\exists t_0,\quad u=\left(1-\frac{C}{r}\right)\partial_t u=0\quad \textit{sur } M_{t_0}\,; \tag{8}$$

$$\exists R>0,\quad |x|\leqslant -t-R \Longrightarrow u(t,x)=0. \tag{9}$$

*Alors $u$ est identiquement nulle.*

La preuve de ce résultat, qui n'est pas conséquence des théorèmes classiques de Calderon ou Lerner–Robbiano, s'appuie sur le fait que si $u(t,\varphi,r,z)=\sum_m u_m(t,r,z)\,\mathrm{e}^{im\varphi}$ est solution de (3), alors $u_m$ est solution de l'équation $(1-C^2r^{-2})\partial_t^2 u_m-(\partial_r^2+\partial_z^2)u_m-2imCr^{-2}\partial_t u_m+m^2r^{-2}u_m=0$ qui est *elliptique* sur $\mathbb{R}_t\times\mathbb{T}$.

L'absence d'hypersurface de Cauchy rend délicate la question de l'existence de solutions globales de (3). Nous laissons ouvert le problème de l'existence de solutions peu régulières ou d'énergie $E_C(u)$ négative, et nous construisons des solutions globales assez régulières, $u\in\mathcal{E}$, $\partial_t u\in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}_t;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3_x))$, et d'énergie positive ou nulle, en résolvant le problème de Cauchy à l'infini nul par la méthode des fonctions propres généralisées. Dans la suite, on ne suppose pas que $\Sigma$ soit non confinante.

THÉORÈME 5. – *Etant donné $u^-\in\mathcal{E}_0^\infty$, il existe un unique $u\in\mathcal{E}$ et un unique $u^+\in\mathcal{E}_0^\infty$, tels que $u\in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}_t;\mathrm{L}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3_x))$, $\partial_t u\in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}_t;\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3_x))$, et*

$$E_0\big(u(t)-u^{+(-)}(t)\big)\longrightarrow 0,\quad t\to +(-)\infty. \tag{10}$$

*On a de plus :*

$$E_0\big(u^-\big)=E_C(u)=E_0\big(u^+\big). \tag{11}$$

Quand $\mathbb{T}\neq\emptyset$, $E_C$ ne définit pas une norme, et on ne sait pas prolonger à $\mathcal{E}_0$ les opérateurs d'onde $W^{+(-)}: u^{+(-)}\mapsto u$ définis sur $\in\mathcal{E}_0^\infty$, et qui par ailleurs sont *non* causaux d'après le théorème 4, (9). En revanche (11) permet de prolonger l'opérateur de diffusion $S: u^-\in\mathcal{E}_0^\infty\mapsto u^+\in\mathcal{E}_0^\infty$ en un opérateur unitaire sur $\mathcal{E}_0$. *Via* la représentation spectrale pour (5), $S$ est unitairement équivalent à une matrice de diffusion $\widetilde{S}$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_k;\mathrm{L}^2(S^2))$, réalisée par une fonction $k\in\mathbb{R}\mapsto\widetilde{S}(k)\in\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(S^2))$. Pour étudier son prolongement dans le plan complexe, on dit que $\lambda\in\mathbb{C}$ est une *résonance* s'il existe $f\in \mathrm{L}^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}^3_x)\setminus\{0\}$ tel que $u(t,x)=\frac{\mathrm{e}^{\lambda(t-|x|)}}{|x|}*_x f$ soit solution de (3). On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des résonances.

THÉORÈME 6. – *$\mathcal{R}$ est une partie discrète de $\mathbb{C}$ disjointe de $i\mathbb{R}$ et on a :*

$$\mathbb{T} \neq \emptyset \Longleftrightarrow \mathrm{Card}(\mathcal{R} \cap ]0, \infty[) = \infty. \tag{12}$$

(12) assure l'existence d'une infinité d'états résonants dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_x^3)$. Ce résultat est une indication en faveur de la conjecture de S. Hawking [6] assurant qu'une violation chronologique rend instable l'espace-temps. Dans le cas globalement hyperbolique, il existe un lien étroit entre les résonances et les pôles de $\widetilde{S}$ (*voir* par exemple [8]). Nous obtenons un résultat moins précis quand $\mathbb{T} \neq \emptyset$ :

THÉORÈME 7. – *$\widetilde{S}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}_k$ à valeur dans $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(S^2))$. Si $k_0$ est un pôle de $\widetilde{S}$, alors $ik_0 \in \mathcal{R}$. Réciproquement, tout nombre complexe $k_0$ vérifiant*

$$ik_0 \in \mathcal{R}, \quad \Re(ik_0) > 0, \quad -ik_0 \notin \mathcal{R}, \tag{13}$$

*est un pôle de $\widetilde{S}$.*

Considérant (12), nous conjecturons qu'il existe des résonances satisfaisant (13). Le théorème de Fourès–Segal [3] impliquerait alors que l'opérateur de diffusion $S$, à l'instar des opérateurs d'onde $W^{+(-)}$, n'est pas causal quand la chronologie est violée.

## Références bibliographiques


[1] Bachelot A., Global properties of the wave equation on nonglobally hyperbolic manifolds, Prépublication UMR 5466, 2001. J. Math. Pures Appl. (à paraître).

[2] Bony J.-M., Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Ann. Sci. École Norm. Sup. 14 (2) (1981) 209–246.

[3] Fourès Y., Segal I.E., Causality and analyticity, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955) 385–405.

[4] Friedlander F.G., The Wave Equation on a Curved Space–Time, Cambridge University Press, 1975.

[5] Häfner D., Complétude asymptotique pour l'équation des ondes dans une classe d'espaces-temps stationnaires et asymptotiquement plats, Ann. Inst. Fourier 51 (3) (2001) 779–833.

[6] Hawking S.W., Chronology protection conjecture, Phys. Rev. D 46 (2) (1992) 603–611.

[7] Hörmander L., A remark on the characteristic Cauchy problem, J. Funct. Anal. 93 (1990) 270–277.

[8] Zworski M., Poisson formulae for resonances, Séminaire E.D.P., École Polytechnique, Exposé XIII, 1996–1997.