C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 29-34, 2000
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*
(Physique mathématique/*Mathematical Physics*)

Création de fermions à l'horizon d'un trou noir chargé

Alain BACHELOT

Unité CNRS 5466, Mathématiques appliquées de Bordeaux, Université Bordeaux I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France
Courriel : bachelot@math.u-bordeaux.fr

(Reçu le 10 octobre 1999, accepté le 8 novembre 1999)

Résumé. Nous montrons que l'état quantique d'un champ de Dirac à l'horizon d'un trou noir chargé satisfait une condition KMS. Celle-ci exprime que le trou noir perd spontanément sa charge en émettant un flux thermal de particules et d'anti-particules.

Creation of fermions at the charged black-hole horizon

Abstract. *We investigate the quantum state of the Dirac field at the horizon of a charged black-hole formed by a spherical gravitational collapse. We prove this state satisfies a KMS condition with the Hawking temperature and the chemical potential associated with the mass and the charge of the black-hole. Moreover, the fermions with charge of same sign to that of the black-hole are emitted more readily than those of opposite charge.*

Abridged English Version

We consider the Reissner–Nordstrøm type curved space-time outside a spherical star of radius $z(t)$, collapsing into a Black-Hole:

$$\mathcal{M} = \{(t,x,\omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathrm{S}^2 \ ; \ x > z(t)\},$$
$$g_{\mu,\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu = F(r)\, \mathrm{d}t^2 - F(r)\, \mathrm{d}x^2 - r^2\, \mathrm{d}\omega^2, \quad \mathrm{d}r = F(r)\, \mathrm{d}x.$$

We introduce Hilbert spaces $\mathcal{L}^2_t := \left[\mathrm{L}^2\big(\,]z(t),\infty[_x \times \mathrm{S}^2_\omega,\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}\omega\big)\right]^4$, $t \in]-\infty,\infty]$ (with $z(\infty) := -\infty$). We investigate the Dirac system for the fermions of charge $q \in \mathbb{R}$ and mass $m \geq 0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi = i\,\mathbb{H}_t\Phi, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

Note présentée par Jean-Michel BONY.

$$\mathbb{H}_t := i\gamma^0\gamma^1\frac{\partial}{\partial x} - qA + iF^{\frac{1}{2}}\gamma^0\left\{\frac{1}{r}\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{2\tan\theta}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\gamma^3\frac{\partial}{\partial\varphi}+im\cos\alpha - m\sin\alpha\gamma^5\right\},$$

$$D(\mathbb{H}_t) = \left\{\Phi\in\mathcal{L}^2_t\ ;\ \mathbb{H}_t\Phi\in\mathcal{L}^2_t,\ x=z(t)\Rightarrow\Phi=\frac{i}{\sqrt{1-\dot{z}^2}}\left(\dot{z}\gamma^0-\gamma^1\right)\Phi\right\}.$$

Here A is the electrostatic potential created by the star and $\alpha\in\mathbb{R}$ is the chiral angle associated with the generalized MIT boundary condition [5]. The hyperbolic mixed problem for (1) is solved by an isometric propagator $U(t,s)$ from $\mathcal{L}^2_s$ onto $\mathcal{L}^2_t$.

Near the black-hole horizon we compare the dynamics (1) with:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi = i\,\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}\Phi,$$
$$\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}\Phi = i\gamma^0\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}\Phi - qA(r_0)\Phi,$$
$$D(\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}) = \left\{\Phi\in\mathcal{L}^2_\infty\ ;\ \mathbb{H}_{\mathrm{BH}}\Phi\in\mathcal{L}^2_\infty\right\}.$$

We introduce the spaces of the fields falling into the black-hole:

$$\mathcal{L}^2_{\mathrm{BH}} = \left\{\Phi\in\mathcal{L}^2_\infty\ ;\ \Phi_2=\Phi_3=0,\ x<0\Rightarrow\Phi(x,\omega)=0\right\},$$

or outgoing to infinity:

$$\mathcal{L}^2_{\mathrm{out}} = \left\{\Phi\in\mathcal{L}^2_\infty\ ;\ \Phi_1=\Phi_4=0,\ x<0\Rightarrow\Phi(x,\omega)=0\right\}.$$

Then the Wave Operator:

$$\Phi\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{BH}},\ \Omega_{\mathrm{BH}}\Phi = \lim_{T\to+\infty} U(0,T)\,\mathrm{e}^{iT\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}}\Phi \text{ in } \mathcal{L}^2_0,$$

exists and defines an isometry from $\mathcal{L}^2_{\mathrm{BH}}$ to $\mathcal{L}^2_0$.

We assume the quantum state is the Fock vacuum in the past. Then the quantum state at the horizon is characterized by the functional:

$$\Phi\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{out}}\oplus\mathcal{L}^2_{\mathrm{BH}}\longmapsto\lim_{T\to+\infty}\left\|\mathbf{1}_{[0,\infty[}(\mathbb{H}_0)U(0,T)\Phi^T\right\|,$$

where

$$\Phi^T(x,\omega) := \Phi(x+T,\omega).$$

Our main result states the quantum state of the outgoing fields satisfies a KMS condition:

THEOREM 1 (Main result). – *Given* $\Phi_{\mathrm{out}}\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{out}}$, $\Phi_{\mathrm{BH}}\in\mathcal{L}^2_{\mathrm{BH}}$, *we have:*

$$\lim_{T\to+\infty}\left\|\mathbf{1}_{[0,\infty[}(\mathbb{H}_0)U(0,T)\left(\Phi^T_{\mathrm{out}}+\Phi^T_{\mathrm{BH}}\right)\right\|^2$$
$$=\left\langle\Phi_{\mathrm{out}},\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_0}qA(r_0)}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_0}\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}}\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_0}qA(r_0)}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_0}\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}}\right)^{-1}\Phi_{\mathrm{out}}\right\rangle_{\mathcal{L}^2_\infty}$$
$$+\left\|\mathbf{1}_{[0,\infty[}(\mathbb{H}_0)(\Omega_{\mathrm{BH}}\Phi_{\mathrm{BH}})\right\|^2, \qquad (2)$$

where r_0 *is the radius of the black-hole and* κ_0 *its surface gravity* ($F(r_0)=0$, $\kappa_0:=F'(r_0)/2>0$).

This result means that an observer going across the future horizon created by a spherical gravitational collapse, measures a thermal radiation of particles and antiparticles outgoing from the black-hole to infinity, at temperature $T_{\mathrm{BH}} = \frac{\kappa_0}{2\pi}$. We had investigated this Hawking effect for the scalar fields in [2], [3]. In the present case a new phenomenon appears: the Hawking radiation has an electric charge density $\varrho_{\mathrm{BH}} = \frac{1}{\pi} q^2 A(r_0)$. In particular, in the case of the Reissner–Nordstrøm black-hole created by a star of mass $0 < M$ and charge Q, $|Q| < M$, we have:

$$T_{\mathrm{BH}} = \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{2\pi\left(M + \sqrt{M^2 - Q^2}\right)^2}, \quad \varrho_{\mathrm{BH}} = \frac{q^2 Q}{\pi\left(M + \sqrt{M^2 - Q^2}\right)}.$$

The important fact is that Q and ϱ_{BH} have the same sign, hence the black-hole preferentially emits charged fermions of same sign as its charge, rather than oppositely charged fermions: that is the spontaneous loss of charge of the black-hole by quantum vacuum polarization [6].

---

1. Système de Dirac en métrique de Reissner–Nordstrøm

L'espace-temps extérieur à une étoile sphérique en effondrement gravitationnel est une variété globalement hyperbolique à bord $(\mathcal{M}, g)$:

$$\mathcal{M} = \left\{(t, x, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathrm{S}^2 \;;\; x > z(t)\right\},$$
$$g_{\mu,\nu}\, \mathrm{d}x^\mu\, \mathrm{d}x^\nu = F(r)\, \mathrm{d}t^2 - F(r)\, \mathrm{d}x^2 - r^2\, \mathrm{d}\omega^2, \quad \mathrm{d}r = F(r)\, \mathrm{d}x,$$

où $F \in \mathrm{C}^1$ satisfait

$$F(r_0) = 0, \quad F'(r_0) > 0, \quad r_0 < r < r_+ \Rightarrow F(r) > 0.$$

r_0 est le rayon du trou noir de gravité de surface $\kappa_0 := \frac{1}{2} F'(r_0)$, et r_+ est le rayon de l'éventuel horizon cosmologique. On suppose que $\mathcal{M}$ est asymptotiquement plate :

$$r_+ = \infty, \quad \lim_{r \to +\infty} F(r) = F(\infty) > 0, \quad \lim_{r \to +\infty} F'(r) = 0,$$

ou DeSitter :

$$r_+ < \infty, \quad F(r_+) = 0, \quad F'(r_+) < 0.$$

La frontière mouvante $\partial\mathcal{M}$, de genre temps mais asymptotiquement caractéristique, est déterminée par le rayon de l'étoile $z(t)$ qui satisfait [1]

$$z \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}), \quad -1 < \dot{z}(t) \leq 0, \quad t \leq 0 \Rightarrow z(t) = z(0),$$
$$z(t) = -t - C\,\mathrm{e}^{-2\kappa_0 t} + \zeta(t), \quad C > 0, \quad |\zeta(t)| + |\dot{\zeta}(t)| = \mathrm{O}\left(\mathrm{e}^{-4\kappa_0 t}\right), \quad t \to +\infty.$$

On se donne aussi un potentiel électrostatique sphérique $A(r)\, \mathrm{d}t$, $A \in \mathrm{C}^1([r_0, r_+])$. L'exemple fondamental est la métrique de (DeSitter–)Reissner–Nordstrøm associée à une étoile sphérique de masse $M > 0$ et de charge $Q \in \mathbb{R}$ dans un univers de constante cosmologique $\Lambda \geq 0$:

$$F(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2, \quad A(r) = \frac{Q}{r}.$$

On considère le système de Dirac pour des particules de charge $q \in \mathbb{R}$ et de masse $m \geq 0$:

$$i\gamma^\mu(\nabla_\mu + i\,qA_\mu)\Psi - m\Psi = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}, \tag{3}$$

avec la condition aux limites « MIT » [5] :

$$n_\mu \gamma^\mu \Psi = i\,\mathrm{e}^{i\alpha\gamma^5}\Psi, \quad \text{sur} \ \partial\mathcal{M}. \tag{4}$$

n_μ est la normale unitaire sortante et $\alpha \in \mathbb{R}$ est l'angle chiral, avec $\alpha \neq (2k+1)\pi$ si $r_+ = \infty$ et $m > 0$. En introduisant les espaces de Hilbert $\mathcal{L}^2_t := \left[\mathrm{L}^2\left(]z(t), \infty[_x \times \mathrm{S}^2_\omega, \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\omega\right)\right]^4$, $t \in]-\infty, \infty]$ (avec $z(\infty) := -\infty$), (3), (4) prend la forme [8], [9] :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi = i\,\mathbb{H}_t\Phi, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$\mathbb{H}_t := i\gamma^0\gamma^1\frac{\partial}{\partial x} - qA + iF^{\frac{1}{2}}\gamma^0\left\{\frac{1}{r}\gamma^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{2\tan\theta}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\gamma^3\frac{\partial}{\partial\varphi} + i\,m\cos\alpha - m\sin\alpha\gamma^5\right\},$$

$$D(\mathbb{H}_t) = \left\{\Phi \in \mathcal{L}^2_t\ ;\ \mathbb{H}_t\Phi \in \mathcal{L}^2_t,\ x = z(t) \Rightarrow \Phi = \frac{i}{\sqrt{1-\dot{z}^2}}\left(\dot{z}\gamma^0 - \gamma^1\right)\Phi\right\}.$$

On montre par la méthode de Kato [7] que le problème mixte associé à (5) est bien posé dans $\mathcal{L}^2_t$:

Proposition 1. – *L'opérateur $i\,\mathbb{H}_t$ est maximal accrétif pour tout t, et anti-auto-adjoint pour $t \leq 0$. Pour tout $\Phi_s \in D(\mathbb{H}_s)$ il existe un unique $\Phi \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}_t, \mathcal{L}_\infty)$ vérifiant $\Phi(t) \in D(\mathbb{H}_t)$ pour tout t, $\Phi(s) = \Phi_s$, et solution de (5). L'opérateur $U(t,s)$ défini par*

$$\Phi(t) = U(t,s)\Phi_s,$$

se prolonge de façon unique en un propagateur fortement continu isométrique de $\mathcal{L}^2_s$ sur $\mathcal{L}^2_t$.

2. État quantique à l'horizon

Près de l'horizon du trou noir nous comparons la dynamique (5) avec

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi = i\,\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}\Phi,$$
$$\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}\Phi = i\gamma^0\gamma^1\frac{\partial}{\partial x}\Phi - qA(r_0)\Phi,$$
$$D(\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}) = \left\{\Phi \in \mathcal{L}^2_\infty\ ;\ \mathbb{H}_{\mathrm{BH}}\Phi \in \mathcal{L}^2_\infty\right\}.$$

On introduit les sous-espaces des champs tombant dans le trou noir futur :

$$\mathcal{L}^2_{\mathrm{BH}} = \left\{\Phi \in \mathcal{L}^2_\infty\ ;\ \Phi_2 = \Phi_3 = 0,\ x < 0 \Rightarrow \Phi(x,\omega) = 0\right\},$$

ou partant à l'infini :

$$\mathcal{L}^2_{\mathrm{out}} = \left\{\Phi \in \mathcal{L}^2_\infty\ ;\ \Phi_1 = \Phi_4 = 0,\ x < 0 \Rightarrow \Phi(x,\omega) = 0\right\}.$$

On établit par la méthode de Coock l'existence de l'opérateur d'onde d'horizon :

PROPOSITION 2. – *Pour tout* $\Phi \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{BH}}$, *la limite forte :*

$$\Omega_{\mathrm{BH}}\Phi = \lim_{T\to+\infty} U(0,T)\,\mathrm{e}^{iT\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}}\Phi \quad \textit{dans } \mathcal{L}^2_0,$$

existe et définit une isométrie de $\mathcal{L}^2_{\mathrm{BH}}$ *dans* $\mathcal{L}^2_0$.

Si on suppose que l'état quantique dans le passé est le vide de Fock, l'état quantique au temps T est caractérisé par la fonctionnelle :

$$\Phi_T \in \mathcal{L}^2_T \longmapsto \left\| \mathbf{1}_{[0,\infty[}(\mathbb{H}_0)U(0,T)\Phi_T \right\|.$$

L'horizon du trou noir étant identifié à la famille des caractéristiques rentrantes

$$(t, x = -t+s, \omega)_{t\in\mathbb{R}}, \quad s>0, \quad \omega \in \mathrm{S}^2,$$

l'état quantique à l'horizon est caractérisé par la fonctionnelle :

$$\Phi \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{out}} \oplus \mathcal{L}^2_{\mathrm{BH}} \longmapsto \lim_{T\to+\infty} \left\| \mathbf{1}_{[0,\infty[}(\mathbb{H}_0)U(0,T)\Phi^T \right\|,$$

où on a posé

$$\Phi^T(x,\omega) := \Phi(x+T,\omega).$$

Le résultat principal énonce que l'état quantique des champs sortants satisfait une condition KMS :

THÉORÈME 1. – *Pour* $\Phi_{\mathrm{out}} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{out}}$ *et* $\Phi_{\mathrm{BH}} \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{BH}}$, *on a :*

$$\begin{aligned} &\lim_{T\to+\infty} \left\| \mathbf{1}_{[0,\infty[}(\mathbb{H}_0)U(0,T)\left(\Phi^T_{\mathrm{out}} + \Phi^T_{\mathrm{BH}}\right) \right\|^2 \\ &= \left\langle \Phi_{\mathrm{out}}, \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_0}qA(r_0)}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_0}\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}}\left(1+\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_0}qA(r_0)}\,\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{\kappa_0}\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}}\right)^{-1}\Phi_{\mathrm{out}} \right\rangle_{\mathcal{L}^2_\infty} \\ &\quad + \left\| \mathbf{1}_{[0,\infty[}(\mathbb{H}_0)(\Omega_{\mathrm{BH}}\Phi_{\mathrm{BH}}) \right\|^2, \end{aligned} \tag{6}$$

Nous esquissons le principe de la démonstration, renvoyant à [4] pour la preuve détaillée. Le mouvement de la frontière asymptotiquement caractéristique induit un effet Doppler infini qui entraîne que $U(0,T)\Phi^T_{\mathrm{out}}$ tend faiblement vers 0 dans $\mathcal{L}^2_0$ quand $T \to +\infty$. Par ailleurs, la réflexion du front d'onde polarisé sur cette frontière assure un gain de régularité de $U(0,T)\Phi^T_{\mathrm{out}}$ sur $\left([z(0), -\eta[\cup] + \eta, \infty[\right)_x \times \mathrm{S}^2_\omega$ pour tout $\eta > 0$, qui y décroît donc fortement. Le propagateur étant unitaire, $U(0,T)\Phi^T_{\mathrm{out}}$ se concentre donc autour de $\{x=0\}\times\mathrm{S}^2$. Définissant l'opérateur $\mathbb{H}^*_0$ en annulant A et F dans $\mathbb{H}_0$, on montre alors que pour $T \to +\infty$:

$$\left\| \mathbf{1}_{[0,\infty[}(\mathbb{H}_0)U(0,T)\Phi^T_{\mathrm{out}} \right\| \sim \left\| \mathbf{1}_{]-\infty,0]}(\mathbb{H}^*_0)\left(|\kappa_0 x|^{-1}\Phi_{\mathrm{out}}(2T + \kappa^{-1}\ln(-x/C),\omega)\right) \right\|,$$

et un calcul explicite du dernier terme permet de conclure.

Ce résultat, interprété dans le cadre de la théorie quantique des champs en relativité générale [4], signifie qu'un observateur franchissant l'horizon du trou noir futur, mesure un flux thermal de particules et d'anti-particules partant à l'infini, de température $T_{\mathrm{BH}} = \frac{\kappa_0}{2\pi}$. C'est donc un effet

Hawking analogue à celui des champs scalaires [2], [3]. Mais il apparaît ici un nouveau phénomène lié à l'interaction électromagnétique entre la charge des fermions, $\pm q$, et le potentiel $A(r)\,\mathrm{d}t$: en effet, (6) montre aussi que cette radiation possède une densité de charge électrique égale à $\frac{1}{\pi}\,q^2 A(r_0)$. Il y a donc prédominance des particules ou des anti-particules selon le signe du potentiel à l'horizon. En particulier, dans le cas de la métrique de (DeSitter–)Reissner–Nordstrøm associée à une étoile de charge Q, le trou noir émettra préférentiellement des fermions de charge de même signe que Q. Si l'on admet que la radiation Hawking est due à une conversion de l'énergie du trou noir, on est amené à conjecturer que celui-ci perd spontanément sa charge par polarisation du vide quantique, et que les trous noirs de la nature sont électriquement neutres [6]. La justification de cette hypothèse nécessiterait la prise en compte de la rétro-action de l'évaporation quantique du trou noir sur la métrique, c'est-à-dire l'analyse des équations d'Einstein couplées aux équations de champs quantiques par le tenseur d'énergie renormalisé. Cela constitue un monstrueux problème non linéaire totalement ouvert.

Références bibliographiques

[1] Bachelot A., Scattering of Scalar Fields by Spherical Gravitational Collapse, J. Math. Pures Appl. 76 (1997) 155–210.

[2] Bachelot A., Quantum Vacuum Polarization at the black-hole Horizon, Ann. Inst. Henri-Poincaré, Physique théorique 67 (2) (1997) 181–222.

[3] Bachelot A., The Hawking Effect, Ann. Inst. Henri-Poincaré, Physique théorique 70 (1) (1999) 41–99.

[4] Bachelot A., Creation of Fermions at the charged black-hole Horizon, prépublication de l'Unité CNRS 5466, 1999.

[5] Chodos A., Jaffe R.L., Johnson K., Thorne C.B., Weisskopf V.F., New extended model of hadrons, Phys. Rev. D (3) 9 (12) (1974) 3471–3495.

[6] Gibbons G.W., Vacuum Polarization and the Spontaneous Loss of Charge by Black Holes, Commun. Math. Phys. 44 (1975) 245–264.

[7] Kato T., Linear evolution equations of "hyperbolic" type, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 17 (1970) 241–258.

[8] Nicolas J.-P., Scattering of linear Dirac fields by a spherically symetric black-hole, Ann. Inst. Henri-Poincaré, Physique théorique 62 (2) (1995) 145–179.

[9] Nicolas J.-P., Global Exterior Cauchy Problem for Spin $3/2$ Zero Rest-Mass Fields in the Schwarzschild Space-Time, Commun. Partial Differ. Eq. 22 (3-4) (1997) 465–502.