C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I, p. 1229-1234, 1997
Physique mathématique/*Mathematical Physics*
(Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*)

L'effet Hawking

Alain BACHELOT

Université Bordeaux 1, Institut de Mathématiques de Bordeaux, Laboratoire CNRS "MAB",
351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex, France.
E-mail : bachelot@math.u-bordeaux.fr

Résumé. On montre qu'un effondrement gravitationnel engendrant un trou noir, transforme asymptotiquement le vide quantique en un état thermal à température Hawking.

The Hawking Effect

Abstract. *We prove that a gravitational collapse creating a Black-Hole, transforms asymptotically the quantum vacuum into a thermal state with the Hawking temperature.*

Abridged English Version

We consider the Klein-Gordon equation outside a star of mass $M > 0$, collapsing to a Black-Hole with surface gravity $\kappa = \frac{1}{4M}$:

$$\partial_t^2 \psi + \mathbb{H}_t \psi = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

where $\mathbb{H}_t$ is the selfadjoint operator on $\mathrm{L}_t^2 = \mathrm{L}^2(]z(t), \infty[_{r_*} \times \mathrm{S}_\omega^2, r^2 dr_* d\omega)$ defined by:

$$\mathbb{H}_t = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r_*} r^2 \frac{\partial}{\partial r_*} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(-\frac{\Delta_{\mathrm{S}^2}}{r^2} + m^2\right), \quad r_* = r + 2M \ln(r - 2M),$$

with dense domain

$$\mathrm{D}(\mathbb{H}_t) = \{f \in \mathrm{L}_t^2;\ \mathbb{H}_t f \in \mathrm{L}_t^2,\ f(z(t), \omega) = 0\},$$

and the radius $z(t)$ of the star at time t satisfies:

$$z \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}),\ \ \forall t \in \mathbb{R},\ -1 < \dot{z}(t) \leq 0,\ \ t \leq 0 \Longrightarrow z(t) = z(0) < 0,$$
$$z(t) = -t - Ae^{-t/2M} + \zeta(t),\ A > 0,\ \zeta(t), \dot{\zeta}(t) = O(e^{-t/M}),\ t \to +\infty.$$

Note présentée par Jean-Michel BONY.

(1) is solved by a propagator $(\psi(t), \partial_t\psi(t)) = U(t,s)(\psi(s), \partial_t\psi(s))$ which is strongly continuous on the Hilbert space

$$\mathcal{H}(t) = [\mathrm{D}(\mathbb{H}_t^{\frac{1}{2}})] \times \mathrm{L}_t^2.$$

Here $[\mathrm{D}(\mathbb{K})]$ denotes the closure of the domain $\mathrm{D}(\mathbb{K})$ of an operator $\mathbb{K}$ on a Hilbert space H for the norm $\|\mathbb{K}(\cdot)\|_H$. Assuming the quantum state to be the Fock vacuum in the past, we investigate the quantum state measured by an observer at rest with respect to the Schwarzschild coordinates, characterized by:

(2) $$\lim_{T\to\infty} \| U(0,T)\Phi \|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)}, \quad \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(t) = [D(\mathbb{H}_t^{\frac{1}{4}})] \times [D(\mathbb{H}_t^{-\frac{1}{4}})].$$

We need the scattering theory by an eternal Black-Hole. The Klein-Gordon equation on the whole Schwarzschild manifold, $\partial_t^2\psi + \mathbb{H}_{\mathcal{S}}\psi = 0$, is given by (1) by replacing $]z(t), \infty[_{r_*}$ by $\mathbb{R}_{r_*}$. The Cauchy problem is solved with a unitary group $\mathrm{U}_{\mathcal{S}}(t)$ on the Hilbert spaces $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ and $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}{}^{\frac{1}{2}}$. We shall use the dense subspace:

$$\mathcal{D}_{\mathcal{S}} = \{\mathbb{H}_{\mathcal{S}} \sum_{\text{finite}} (f_{\ell,m}(r_*), p_{\ell,m}(r_*)) \otimes Y_{\ell,m}(\omega);\, f_{\ell,m}, p_{\ell,m} \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})\},$$

where $Y_{\ell,m}$ are the spherical harmonics. The asymptotic free dynamics at the Black-Hole Horizon is determined by the group $\mathrm{U}_{\mathrm{BH}}(t)$, associated with $\partial_t^2\Psi + \mathbb{H}_{\mathrm{BH}}\Psi = 0$, on the spaces

$$\mathcal{H}_\pm = \left\{{}^t(f, \pm\partial_{r_*} f);\, f \in \left[\mathrm{D}(\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}^{\frac{1}{2}})\right]\right\}, \quad \mathcal{H}_\pm^{\frac{1}{2}} = \left\{{}^t(f, \pm\partial_{r_*} f);\, f \in \left[\mathrm{D}(\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}^{\frac{1}{4}})\right]\right\},$$

$$\mathbb{H}_{\mathrm{BH}} = -\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}, \quad \mathrm{D}(\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}) = \left\{f \in \mathrm{L}_{\mathrm{BH}}^2;\ \partial_{r_*}^2 f \in \mathrm{L}_{\mathrm{BH}}^2\right\}, \quad \mathrm{L}_{\mathrm{BH}}^2 = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_{r_*} \times \mathrm{S}_\omega^2, 4M^2 dr_* d\omega).$$

We choose a cut-off function $\chi(r_*)$ such that:

(3) $$\chi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \exists a, b;\ 0 < a < b < 1;\ r_* < a \Longrightarrow \chi(r_*) = 1,\ b < r_* \Longrightarrow \chi(r_*) = 0,$$

and we introduce the Black-Hole Horizon Wave Operators

(4) $$\Omega_{\mathrm{BH}}^\pm \Phi = \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{U}_{\mathrm{BH}}(-t)\chi\mathrm{U}_{\mathcal{S}}(t)\Phi \quad \text{in } [\mathrm{D}(\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}^{\frac{1}{2}})] \times \mathrm{L}_{\mathrm{BH}}^2.$$

At the flat infinity the solutions of the Klein-Gordon equation:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_\infty + \mathbb{H}_\infty\psi_\infty = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3,$$

$$\mathbb{H}_\infty = -\Delta_{\mathbb{R}_x^3} + m^2, \quad \mathrm{D}(\mathbb{H}_\infty) = \left\{f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_x^3, dx);\ -\Delta_{\mathbb{R}_x^3} f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_x^3, dx)\right\},$$

are given by a free propagator $\mathrm{U}_\infty(t)$ which is a unitary group on the Hilbert spaces:

$$\mathcal{H}_\infty = \left[\mathrm{D}(\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}})\right] \times \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3), \quad \mathcal{H}_\infty^{\frac{1}{2}} = \left[\mathrm{D}(\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{4}})\right] \times \left[\mathrm{D}(\mathbb{H}_\infty^{-\frac{1}{4}})\right].$$

Because of the long range gravitational interaction, we need the Dollard modified propagator, which is unitary on $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_\infty^{\frac{1}{2}}$:

$$\mathrm{U}_\infty^{\mathrm{D}}(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(t\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}} + \ln(t)\mathbb{D}_\infty\right) & \mathbb{H}_\infty^{-\frac{1}{2}} \sin\left(t\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}} + \ln(t)\mathbb{D}_\infty\right) \\ -\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}} \sin\left(t\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}} + \ln(t)\mathbb{D}_\infty\right) & \cos\left(t\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}} + \ln(t)\mathbb{D}_\infty\right) \end{bmatrix}.$$

Here we have put for $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}_x^3)$ and $t \in \mathbb{R}^*$:

$$(\mathbb{D}_\infty f)(x) = -\frac{Mm^2}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi} \mid \xi \mid^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-iy\cdot\xi} f(y)dy \right) d\xi, \quad \ln(t) = \frac{t}{\mid t \mid} \ln \mid t \mid.$$

Identifying $\mid x \mid = r_*$, we define the Flat Infinity Wave Operators:

$$\Omega_\infty^\pm \Phi = \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{U}_\infty^{\mathrm{D}}(-t)(1-\chi)\mathrm{U}_{\mathcal{S}}(t)\Phi \quad \text{in } \mathcal{H}_\infty. \tag{5}$$

THEOREM 1. – *The strong limits* (4) *and* (5) *exist for any* Φ *in* $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, *and do not depend on the function* χ *satisfying* (3). *Moreover,* $\Omega_{\mathrm{BH}}^\pm \oplus \Omega_\infty^\pm$ *is an isometry from* $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ *onto* $\mathcal{H}_\pm \oplus \mathcal{H}_\infty$ *and can be extended as an isometry from* $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{\frac{1}{2}}$ *onto* $\mathcal{H}_\pm^{\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{H}_\infty^{\frac{1}{2}}$. *Furthermore, if* $\Phi \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ *we have:*

$$\sqrt{\coth\left(\frac{\pi}{\kappa}\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}^{\frac{1}{2}}\right)}\, \Omega_{\mathrm{BH}}^\pm \Phi \in \mathcal{H}_\pm^{\frac{1}{2}}.$$

THEOREM 2 (Main Result). – *For all* Φ *in* $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ *the limit* (2) *exists and:*

$$\lim_{T\to+\infty} \| U(0,T)\Phi \|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)}^2 = \| \Omega_\infty^- \Phi \|_{\mathcal{H}_\infty^{\frac{1}{2}}}^2 + \left\| \sqrt{\coth\left(\frac{\pi}{\kappa}\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}^{\frac{1}{2}}\right)}\, \Omega_{\mathrm{BH}}^- \Phi \right\|_{\mathcal{H}_-^{\frac{1}{2}}}^2.$$

According to the Quantum Field Theory, this limit means that the observers at rest with respect to the Schwarzschild coordinates measure at their infinite proper time a thermal radiation of particles outgoing towards infinity, at temperature $\frac{1}{8\pi M}$, independent of the history of the collapse. This is the famous Hawking Effect (*see* [3]).

---

1. Le problème quantique

Nous avons prouvé dans [2] qu'un voyageur franchissant l'horizon futur d'un trou noir créé par l'effondrement gravitationnel d'une étoile sphérique, mesure un flux thermal de particules sortant du trou noir (radiation Hawking à l'horizon). Nous traitons ici du cas important d'un observateur immobile à l'extérieur du trou noir, en montrant qu'un tel observateur constate la même polarisation du vide quantique, qui est donc un phénomène global (effet Hawking, *voir* [3]).

On considère l'équation de Klein-Gordon de masse $m \geq 0$, dans l'espace-temps extérieur à une étoile sphérique de masse $M > 0$, s'effondrant en un trou noir futur de gravité de surface $\kappa = \frac{1}{4M}$:

$$\partial_t^2 \psi + \mathbb{H}_t \psi = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

où $\mathbb{H}_t$ est l'opérateur auto-adjoint sur l'espace $\mathrm{L}_t^2 = \mathrm{L}^2(]z(t), \infty[_{r_*} \times \mathrm{S}_\omega^2, r^2 dr_* d\omega)$:

$$\mathbb{H}_t = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r_*} r^2 \frac{\partial}{\partial r_*} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(-\frac{\Delta_{\mathrm{S}^2}}{r^2} + m^2\right), \quad r_* = r + 2M\ln(r-2M),$$

de domaine dense

$$\mathrm{D}(\mathbb{H}_t) = \{f \in \mathrm{L}^2_t\,;\ \mathbb{H}_t f \in \mathrm{L}^2_t,\ f(z(t),\omega) = 0\},$$

et le rayon $z(t)$ de l'étoile au temps t de Schwarzschild, exprimé en coordonnées de Regge-Wheeler satisfait (*voir* [1]) :

$$z \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R}),\ \ \forall t \in \mathbb{R},\ -1 < \dot{z}(t) \leq 0,\ \ t \leq 0 \Longrightarrow z(t) = z(0) < 0,$$
$$z(t) = -t - Ae^{-t/2M} + \zeta(t),\ A > 0,\ \zeta(t), \dot{\zeta}(t) = O(e^{-t/M}),\ t \to +\infty.$$

La solution du problème mixte hyperbolique associé à (6) est donnée par un propagateur $(\psi(t), \partial_t\psi(t)) = U(t,s)(\psi(s), \partial_t\psi(s))$ qui est fortement continu sur les espaces de Hilbert

$$\mathcal{H}(t) = [\mathrm{D}(\mathbb{H}_t^{\frac{1}{2}})] \times \mathrm{L}^2_t.$$

Ici $[\mathrm{D}(\mathbb{K})]$ désigne la fermeture du domaine $\mathrm{D}(\mathbb{K})$ d'un opérateur $\mathbb{K}$ sur un espace de Hilbert H pour la norme $\|\mathbb{K}(\cdot)\|_H$. Supposant que l'état quantique dans le passé est le vide de Fock, on s'intéresse à sa mesure à l'infini futur du temps propre d'un observateur au repos en coordonnées de Schwarzschild, déterminée par :

$$\text{(7)}\qquad \lim_{T\to\infty} \|\ U(0,T)\Phi\ \|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)},\quad \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(t) = [\mathrm{D}(\mathbb{H}_t^{\frac{1}{4}})] \times [\mathrm{D}(\mathbb{H}_t^{-\frac{1}{4}})].$$

Le résultat fait intervenir les opérateurs d'onde de la diffusion par un trou noir éternel.

2. Diffusion par un trou noir

L'équation de Klein-Gordon sur la variété de Schwarzschild, $\partial_t^2\psi + \mathbb{H}_\mathcal{S}\psi = 0$, est donnée par (6) en remplaçant $]z(t), \infty[_{r_*}$ par $\mathbb{R}_{r_*}$. Le problème de Cauchy est résolu par un groupe unitaire $\mathrm{U}_\mathcal{S}(t)$ sur les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_\mathcal{S}$ et $\mathcal{H}_\mathcal{S}^{\frac{1}{2}}$ définis comme précédemment. Nous utiliserons le sous-espace dense :

$$\mathcal{D}_\mathcal{S} = \{\mathbb{H}_\mathcal{S} \sum_{\text{finie}} (f_{\ell,m}(r_*), p_{\ell,m}(r_*)) \otimes Y_{\ell,m}(\omega)\,;\ f_{\ell,m}, p_{\ell,m} \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})\},$$

où $Y_{\ell,m}$ désignent les harmoniques sphériques. La dynamique asymptotiquement libre aux horizons du trou noir est déterminée par le groupe $\mathrm{U}_{\mathrm{BH}}(t)$, associé à l'équation $\partial_t^2\Psi + \mathbb{H}_{\mathrm{BH}}\Psi = 0$, sur les espaces

$$\mathcal{H}_\pm = \left\{{}^t(f, \pm\partial_{r_*}f); f \in \left[\mathrm{D}(\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}^{\frac{1}{2}})\right]\right\},\ \ \mathcal{H}_\pm^{\frac{1}{2}} = \left\{{}^t(f, \pm\partial_{r_*}f); f \in \left[\mathrm{D}(\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}^{\frac{1}{4}})\right]\right\},$$

$$\mathbb{H}_{\mathrm{BH}} = -\frac{\partial^2}{\partial r_*^2},\ \mathrm{D}(\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}) = \{f \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}};\ \partial_{r_*}^2 f \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}}\},\ \ \mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_{r_*} \times \mathrm{S}^2_\omega, 4M^2 dr_* d\omega).$$

On choisit une fonction de troncature $\chi(r_*)$ telle que :

$$\text{(8)}\qquad \chi \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \exists a, b\,;\ 0 < a < b < 1\,;\ r_* < a \Longrightarrow \chi(r_*) = 1,\ b < r_* \Longrightarrow \chi(r_*) = 0,$$

et on introduit les *opérateurs d'ondes d'horizon*

$$\text{(9)}\qquad \Omega_{\mathrm{BH}}^\pm\Phi = \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{U}_{\mathrm{BH}}(-t)\chi\mathrm{U}_\mathcal{S}(t)\Phi \quad \text{dans } \left[\mathrm{D}(\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}^{\frac{1}{2}})\right] \times \mathrm{L}^2_{\mathrm{BH}}.$$

Sur l'espace de Minkowski asymptote à l'infini spatial, les solutions de l'équation de Klein-Gordon,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_\infty + \mathbb{H}_\infty \psi_\infty = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x,$$

$$\mathbb{H}_\infty = -\Delta_{\mathbb{R}^3_x} + m^2, \;\; \mathrm{D}(\mathbb{H}_\infty) = \left\{ f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3_x, dx);\; -\Delta_{\mathbb{R}^3_x} f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3_x, dx)\right\},$$

sont données par le propagateur libre $\mathrm{U}_\infty(t)$ qui est un groupe unitaire sur les espaces

$$\mathcal{H}_\infty = \left[\mathrm{D}(\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}})\right] \times \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3), \;\; \mathcal{H}_\infty^{\frac{1}{2}} = \left[\mathrm{D}(\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{4}})\right] \times \left[\mathrm{D}(\mathbb{H}_\infty^{-\frac{1}{4}})\right].$$

À cause de la longue portée de l'interaction gravitationnelle on doit utiliser le propagateur modifié à la Dollard, qui est unitaire sur $\mathcal{H}_\infty$ et $\mathcal{H}_\infty^{\frac{1}{2}}$:

$$\mathrm{U}^{\mathrm{D}}_\infty(t) = \begin{bmatrix} \cos\left(t\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}} + \ln(t)\mathbb{D}_\infty\right) & \mathbb{H}_\infty^{-\frac{1}{2}} \sin\left(t\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}} + \ln(t)\mathbb{D}_\infty\right) \\ -\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}} \sin\left(t\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}} + \ln(t)\mathbb{D}_\infty\right) & \cos\left(t\mathbb{H}_\infty^{\frac{1}{2}} + \ln(t)\mathbb{D}_\infty\right) \end{bmatrix}.$$

Pour $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3_x)$ et $t \in \mathbb{R}^*$ on a posé :

$$(\mathbb{D}_\infty f)(x) = -\frac{Mm^2}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\cdot\xi} \mid \xi \mid^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-iy\cdot\xi} f(y)dy\right) d\xi, \;\; \ln(t) = \frac{t}{\mid t \mid} \ln \mid t \mid .$$

Identifiant $\mid x \mid = r_*$, on définit les *opérateurs d'onde à l'infini* :

$$\Omega^\pm_\infty \Phi = \lim_{t\to\pm\infty} \mathrm{U}^{\mathrm{D}}_\infty(-t)(1-\chi)\mathrm{U}_{\mathcal{S}}(t)\Phi \quad \text{dans } \mathcal{H}_\infty. \tag{10}$$

THÉORÈME 1. – *Les limites* (9) *et* (10) *existent pour tout* Φ *dans* $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$, *et ne dépendent pas de la fonction* χ *satisfaisant* (8). *De plus,* $\Omega^\pm_{\mathrm{BH}} \oplus \Omega^\pm_\infty$ *est une isométrie de* $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ *sur* $\mathcal{H}_\pm \oplus \mathcal{H}_\infty$ *qui s'étend en une isométrie de* $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}^{\frac{1}{2}}$ *sur* $\mathcal{H}_\pm^{\frac{1}{2}} \oplus \mathcal{H}_\infty^{\frac{1}{2}}$. *Par ailleurs, si* $\Phi \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, *on a :*

$$\sqrt{\coth\left(\frac{\pi}{\kappa}\mathbb{H}_{\mathrm{BH}}^{\frac{1}{2}}\right)}\,\Omega^\pm_{\mathrm{BH}}\Phi \in \mathcal{H}_\pm^{\frac{1}{2}}.$$

3. L'effet Hawking

Pour calculer la limite (7), on analyse très précisément la propagation du champ pour obtenir la structure du propagateur rétrograde $U(0,T)$ dans $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)$ quand $T \to \infty$. L'étude précédente permet d'évaluer la partie du champ loin de l'étoile : $(1-\chi)U(0,T)\Phi = (1-\chi)\mathrm{U}_{\mathcal{S}}(-T)\Phi \sim (1-\chi)\mathrm{U}^{\mathrm{D}}_\infty(-T)\Omega^-_\infty\Phi$. L'évaluation près de l'étoile est beaucoup plus délicate. On note que $\chi U(0,T)\Phi$ est déterminé par la trace $\varphi_T(s,\omega)$ de Ψ sur la sous-variété caractéristique $\gamma = \{(s, r_* = 1-s, \omega);\; (s,\omega) \in \mathbb{R}\times \mathrm{S}^2\}$. On montre que $\varphi_T(s,\omega) \sim [\Omega^-_{\mathrm{BH}}\Phi]_1(r_* = -2s+1-T, \omega) \equiv \varphi_T^-(s,\omega)$ dans $\mathrm{H}^1(\gamma)$. On considère le problème mixte caractéristique où Ψ est solution de (6) avec donnée φ spécifiée sur γ ; l'application $\varphi \mapsto (\chi\Psi, \chi\partial_t\Psi)$ est continue de $\mathrm{H}^1(\gamma)$ dans $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)$. Étudiant l'asymptotique de la solution associée à φ_T^-, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} U(0,T)\Phi(r_*,\omega) &= (1-\chi(r_*))\mathrm{U}^{\mathrm{D}}_\infty(-T)\Omega^-_\infty\Phi(r_*,\omega) \\ &\quad + \frac{\chi(r_*)}{\kappa r_*}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\Omega^-_{\mathrm{BH}}\Phi\left(2T + \frac{1}{\kappa}\ln(-r_*) - \frac{1}{\kappa}\ln(A), \omega\right) + o(1). \end{aligned}$$

Les termes de droite sont asymptotiquement orthogonaux et la limite de leur norme est explicitement calculable.

THÉORÈME 2 (Résultat principal). – *Pour tout* Φ *dans* $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$, *la limite* (7) *existe et :*

$$\lim_{T \to +\infty} \| U(0,T)\Phi \|^2_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)} = \| \Omega^-_\infty \Phi \|^2_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_\infty} + \left\| \sqrt{\coth\left(\frac{\pi}{\kappa}\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{BH}}\right)}\, \Omega^-_{\mathrm{BH}}\Phi \right\|^2_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_-}.$$

Selon la théorie quantique des champs, cette limite signifie que l'observateur au repos en coordonnées de Schwarzschild mesure à l'infini de son temps propre, une émission thermale, à la température $\frac{1}{8\pi M}$, indépendante de l'histoire de l'effondrement gravitationnel, de particules sortant du trou noir vers l'infini. C'est le célèbre effet Hawking (*voir* [3]).

Note remise le 6 octobre 1997, acceptée le 13 octobre 1997.

Références bibliographiques

[1] **Bachelot A., 1997**. Scattering of Scalar Fields by Spherical Gravitational Collapse, *J. Math. Pures. Appl.*, 76(2), p. 155-210.
[2] **Bachelot A., 1997**. Quantum Vacuum Polarization at the Black-Hole Horizon, *Ann. Inst. Henri-Poincaré - physique théorique*, 67 (2), p. 181-222.
[3] **Hawking S., 1975**. Particle Creation by Black-Holes, *Comm. Math. Phys.*, 43, p. 199-220.