C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, p. 855-860, 1997
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

La radiation Hawking à l'horizon d'un trou noir

Alain BACHELOT

Université Bordeaux-I, Institut de Mathématiques de Bordeaux,
Laboratoire CNRS "MAB", 351, cours de la Libération, 33405 Talence CEDEX, France.
E-mail: bachelot@math.u-bordeaux.fr

Résumé. On met en évidence la polarisation du vide quantique vers un état thermal de température Hawking, à l'horizon futur d'un trou noir créé par effondrement gravitationnel.

Hawking radiation at the black-hole horizon

Abstract. *We establish the polarization of the quantum vacuum to a thermal state with the Hawking temperature, at the future black-hole horizon created by a gravitational collapse.*

Abridged English Version

We consider the Klein-Gordon equation outside a star of mass $M > 0$, collapsing to a Black-Hole,

$$\partial_t^2 \Psi - \mathbb{H}_t \Psi = 0,\ t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

where $\mathbb{H}_t$ is the self-adjoint operator on $L_t^2 \equiv L^2\left(]\,z(t),\ \infty[_{r_*} \times S_\omega^2,\ r^2\,dr_*\,d\omega\right)$ defined by

$$\mathbb{H}_t = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r_*} r^2 \frac{\partial}{\partial r_*} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(-\frac{\Delta_{S^2}}{r^2} + m^2\right),\ r_* = r + 2\,M \ln (r - 2\,M),$$

with dense domain

$$D(\mathbb{H}_t) = \{f \in L_t^2,\ \mathbb{H}_t f \in L_t^2,\ f(z(t),\ \omega) = 0\},$$

and the radius $z(t)$ of the star at time t, satisfying

$$z \in C^2(\mathbb{R}),\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad -1 < \dot{z}(t) \leq 0, \quad t \leq 0 \Rightarrow z(t) = z(0) < 0,$$

$$z(t) = -t - A\,e^{-t/2M} + \zeta(t), \quad A > 0, \quad \zeta(t),\ \dot{\zeta}(t) = O(e^{-t/M}), \quad t \to +\infty.$$

Note présentée par Jean-Michel BONY.

(1) is solved by a propagator $(\Psi(t), \partial_t \Psi(t)) = U(t, s)(\Psi(s), \partial_t \Psi(s))$. Assuming the quantum state to be the Fock vacuum in the past, we investigate the quantum state at the Black-Hole Horizon, characterized by

$$\lim_{t\to\infty} \|U(0, t)\,\Phi^t\|_{[D(\mathbb{H}_t^{\frac{1}{4}})]\times[D(\mathbb{H}_t^{-\frac{1}{4}})]}$$

with $\Phi^t(r_*, \omega) = \Phi^0(r_* + t, \omega)$ defined by

$$\Phi^0 = \sum_{\text{finite}} (f_{l,m}(r_*), -f'_{l,m}(r_*)) \otimes Y_{l,m}(\omega), \tag{2}$$

where $f_{l,m} \in C_0^\infty(]z(0), \infty[)$ and $Y_{l,m}$ are the spherical harmonics. Here $[D(\mathbb{K})]$ denotes the closure of the domain $D(\mathbb{K})$ of an operator $\mathbb{K}$ on a Hilbert space H for the norm $\|\mathbb{K}(\cdot)\|_H$. The asymptotic free dynamics at the Black-Hole Horizon is defined on the space $L^2_{BH} \equiv L^2(\mathbb{R}_{r_*} \times S^2_\omega, 4M^2\, dr_*\, d\omega)$ by the operator

$$\mathbb{H}_{BH} = -\frac{\partial^2}{\partial r_*^2},\ D(\mathbb{H}_{BH}) = \{f \in L^2_{BH};\ \partial^2_{r_*} f \in L^2_{BH}\}.$$

THEOREM 1. – *Given* Φ^0 *satisfying* (2), *we have:*

$$\lim_{t\to+\infty} \|U(0, t)\,\Phi^t\|_{[D(H_t^{\frac{1}{4}})]\times[D(\mathbb{H}_t^{-\frac{1}{4}})]} = \left\|\sqrt{\coth(4M\pi\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}_{BH})}\,\Phi^0\right\|_{[D(H^{\frac{1}{4}}_{BH})]\times[D(\mathbb{H}^{-\frac{1}{4}}_{BH})]}.$$

According to quantum field theory (*see* e.g. [4]), this limit means that the Black-Hole Horizon emits a thermal radiation of particles outgoing towards infinity, at temperature $\frac{1}{8\pi M}$, independent of the history of the collapse. This is the famous result by S. Hawking (*see* [3]).

---

1. Le problème quantique

L'espace-temps extérieur à une étoile sphérique de masse $M > 0$, de rayon $z(t)$ en coordonnée de Regge-Wheeler, stationnaire dans le passé, en effondrement gravitationnel vers un trou noir dans le futur, est décrit en métrique de Schwarzschild par la variété globalement hyperbolique

$$\mathcal{M} = \{(t, r_*, \omega) \in \mathbb{R}_t \times]z(t), \infty[_{r_*} \times S^2_\omega\}, \qquad r_* = r + 2M\ln(r - 2M),$$

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right).$$

En notant $\kappa = \frac{1}{4M}$ la gravité surfacique, z satisfait :

$$z \in C^2(\mathbb{R}),\ \ \forall t \in \mathbb{R}\ \ -1 < \dot{z}(t) \leq 0,\ \ t \leq 0 \Rightarrow z(t) = z(0) < 0,$$

$$z(t) = -t - Ae^{-2\kappa t} + \zeta(t),\ A > 0,\ \ |\,\zeta(t)\,| + |\,\dot{\zeta}(t)\,| = O(e^{-4\kappa t}),\ t \to +\infty.$$

L' *horizon* du trou noir est atteint pour $r_* \to -\infty$, $t \to +\infty$, $r_* + t = \text{Cste.} > 0$. Nous considérons le problème mixte pour l'équation de Klein-Gordon de masse $m \geq 0$:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r_*}r^2\frac{\partial}{\partial r_*} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(-\frac{\Delta_{S^2}}{r^2} + m^2\right)\right\}\Psi = 0 \text{ dans } \mathcal{M},$$

$$\Psi(t, r_* = z(t), \omega) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \ \omega \in S^2,$$

$$\Psi(t = s, r_*, \omega) = \Phi(r_*, \omega).$$

On a montré dans [1] que la solution $\Psi(t,.) = U(t,s)\Phi$ est donnée par un propagateur $U(t,s)$ qui est fortement continu sur la famille d'espaces de Hilbert $\mathcal{H}(t)$ des champs d'énergie finie,

$$\mathcal{H}(t) = [D(\mathbb{H}_t^{\frac{1}{2}})] \times L_t^2.$$

Ici $\mathbb{H}_t$ est l'opérateur auto-adjoint sur l'espace $L_t^2 \equiv L^2(]z(t), \infty[_{r_*} \times S_\omega^2, r^2 dr_* d\omega)$:

$$\mathbb{H}_t = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r_*}r^2\frac{\partial}{\partial r_*} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(-\frac{\Delta_{S^2}}{r^2} + m^2\right),$$

$$D(\mathbb{H}_t) = \{f \in L_t^2, \ \mathbb{H}_t f \in L_t^2, \ f(z(t), \omega) = 0\},$$

et dans cette Note, $[D(\mathbb{K})]$ désigne le complété du domaine $D(\mathbb{K})$ d'un opérateur $\mathbb{K}$ sur un espace de Hilbert H pour la norme $\| \mathbb{K}(\cdot) \|_H$. En fait, l'espace fondamental de la théorie quantique du champ est l'espace

$$\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(t) \equiv [D(\mathbb{H}_t^{\frac{1}{4}})] \times [D(\mathbb{H}_t^{-\frac{1}{4}})],$$

et l'état de *vide quantique* à un instant t est défini par la fonctionnelle :

$$\Phi_t \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(t) \longrightarrow E_t^0(\Phi_t) = \exp\left(-\frac{1}{2} \| \Phi_t \|^2_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(t)}\right).$$

Plus généralement, un *état thermal* de température $\theta > 0$ relativement à un hamiltonien $\mathbb{H} > 0$ est défini (*voir* par exemple [4]) par la fonctionnelle :

(1) $$\Phi \longrightarrow E^\theta(\Phi) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left\| \sqrt{\coth\left(\frac{1}{2\theta}\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}\right)}\Phi \right\|^2_{[D(\mathbb{H}^{\frac{1}{4}})] \times [D(\mathbb{H}^{-\frac{1}{4}})]}\right).$$

L'*état quantique fondamental* dans $\mathcal{M}$ est défini par les fonctionnelles $\mathcal{E}_t$:

$$\Phi_t \in (C_0^2 \times C_0^1)(]z(t), \infty[_{r_*} \times S_\omega^2) \longrightarrow \mathcal{E}_t(\Phi_t) \equiv E_0^0(U(0,t)\Phi_t).$$

L'étoile étant stationnaire dans le passé, $U(0,t)$ est unitaire pour $t < 0$, et l'état fondamental coïncide donc avec le vide dans le passé :

$$t \leq 0 \Rightarrow \mathcal{E}_t(\Phi_t) = E_t^0(\Phi_t).$$

Pour étudier la structure de l'état fondamental à l'horizon du trou noir, nous choisissons $\Phi^0 \in [C_0^\infty(]z(0),\infty[_{r_*} \times S^2_\omega)]^2$, et nous posons :

$$\Phi^T(r_*,\omega) \equiv \Phi^0(r_*+T,\omega). \tag{2}$$

Le problème revient alors à calculer

$$\lim_{T\to+\infty} \| U(0,T)\Phi^T \|^2_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)}. \tag{3}$$

2. L'effet Hawking

On sait qu'au voisinage de l'horizon le champ obéit à la dynamique asymptotique

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi_{BH} - \frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\Psi_{BH} = 0, \qquad r_* \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R},\ \omega \in S^2. \tag{4}$$

On introduit donc : l'opérateur $\mathbb{H}_{BH}$ sur $L^2_{BH} \equiv L^2(\mathbb{R}_{r_*} \times S^2_\omega, 4M^2 dr_* d\omega)$ donné par :

$$\mathbb{H}_{BH} = -\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}, \qquad D(\mathbb{H}_{BH}) = \{f \in L^2_{BH};\ \partial^2_{r_*} f \in L^2_{BH}\},$$

les espaces de Hilbert :

$$\mathcal{H}_{BH} \equiv [D(\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}_{BH})] \times L^2_{BH}, \qquad \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{BH} \equiv [D(\mathbb{H}^{\frac{1}{4}}_{BH})] \times [D(\mathbb{H}^{-\frac{1}{4}}_{BH})],$$

et des sous espaces de particules rentrantes dans le trou noir (+), ou sortantes vers l'infini $(-)$:

$$\mathcal{D}^\pm_{BH} = \{\Phi^\pm_{BH}(r_*,\omega) = \sum_{\text{finie}}{}^t (f_{l,m}(r_*), \pm f'_{l,m}(r_*)) \otimes Y_{l,m}(\omega);\ f_{l,m} \in C_0^\infty(]0,\infty[)\}.$$

$Y_{l,m}$ désigne la base d'harmoniques sphériques de $L^2(S^2)$. On note $U_{BH}(t)$ le groupe unitaire sur $\mathcal{H}_{BH}$ associé à (4). Étant donnée une fonction θ satisfaisant :

$$x \le 0 \Rightarrow \theta(x) = 1, \quad 1 \le x \Rightarrow \theta(x) = 0, \tag{5}$$

on introduit l'opérateur de troncature Θ_{BH} donné par :

$$(\Theta_{BH}\Phi)(r_*,\omega) = {}^t(\theta(r_*)f(r_*,\omega), \theta(r_*)p((r_*,\omega))), \quad \Phi = {}^t(f,p),$$

et on construit l'*opérateur d'onde d'horizon* Ω^+_{BH} :

$$\Phi^+_{BH} \in \mathcal{D}^+_{BH} \mapsto \Omega^+_{BH}\Phi^+_{BH} = \lim_{t\to+\infty} U(0,t)\Theta_{BH}U_{BH}(t)\Phi^+_{BH} \text{ dans } \mathcal{H}(0). \tag{6}$$

PROPOSITION 1. – *Pour tout $\Phi^+_{BH} \in \mathcal{D}^+_{BH}$ la limite* (6) *existe et ne dépend pas de θ satisfaisant* (5). *De plus,*

$$\Omega^+_{BH}\Phi^+_{BH} \in \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0).$$

Nous énonçons le résultat fondamental de cette Note :

THÉORÈME 1. – *Étant donné* $\Phi_{BH}^0 = \Phi_{BH}^+ + \Phi_{BH}^-$, $\Phi_{BH}^\pm \in \mathcal{D}_{B\mathcal{H}}^\pm$, *et* Φ_{BH}^t *étant défini par* (2), *la norme de* $U(0,t)\Phi_{BH}^t$ *dans* $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)$ *a une limite quand* $t \to +\infty$ *et*

$$\lim_{t\to+\infty} \| U(0,t)\Phi_{BH}^t \|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)}^2 = \| \Omega_{BH}^+ \Phi_{BH}^+ \|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)}^2 + \left\| \sqrt{\coth\left(\frac{\pi}{\kappa}\mathbb{H}_{BH}^{\frac{1}{2}}\right)}\, \Phi_{BH}^- \right\|_{\mathcal{H}_{BH}^{\frac{1}{2}}}^2 .$$

Compte tenu de (1), l'expression de cette limite met en évidence l'émission au voisinage de l'horizon du trou noir, d'un gaz thermal de particules sortantes vers l'infini, de température $\frac{1}{8\pi M}$, indépendante de l'histoire de l'effondrement de l'étoile. C'est la corroboration exacte de l'analyse heuristique de S. Hawking (*voir* [3]). Ce résultat repose sur une estimation très fine du propagateur. En effet, si $\Phi_{BH}^- \neq 0$, l'effet Doppler infini traduisant la création du trou noir, entraîne

$$(7) \qquad \| U(0,t)\Phi_{BH}^t \|_{\mathcal{H}(0)} \sim e^{\kappa t}, \quad t \to +\infty.$$

On a cependant

$$(8) \qquad \| U(0,t)\Phi_{BH}^t \|_{\mathcal{H}_1(0)} = O(1), \quad t \to +\infty,$$

où $\mathcal{H}_1(t)$ est un espace de distributions conormales relativement au champ de vecteurs $| t + r_* |^{\frac{1}{2}} (\partial_{r_*} + \partial_t)$, $\partial_{r_*} - \partial_t$, $\nabla_{S_\omega^2}$, défini comme complété de $[C_0^\infty(]z(t), \infty[_{r_*} \times S_\omega^2)]^2$ pour la norme

$$\begin{aligned}
\| {}^t(f,p) \|_{\mathcal{H}_1(t)}^2 = \frac{1}{2} \int_{z(t)}^{-t} \int_{S^2} & | r_* + t | \cdot | \partial_{r_*} f(r_*,\omega) + p(r_*,\omega) |^2 + | \partial_{r_*} f(r_*,\omega) - p(r_*,\omega) |^2 \\
& + 2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\frac{1}{r^2} | \nabla_{S_\omega^2} f(r_*,\omega) |^2 + m^2 | f(r_*,\omega) |^2\right] r^2 dr_*\, d\omega \\
& + \int_{-t}^{\infty} \int_{S^2} | \partial_{r_*} f(r_*,\omega) |^2 + | p(r_*,\omega) |^2 \\
& + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\frac{1}{r^2} | \nabla_{S_\omega^2} f(r_*,\omega) |^2 + m^2 | f(r_*,\omega) |^2\right] r^2 dr_*\, d\omega.
\end{aligned}$$

L'équivalent (7) est plutôt décourageant, et l'estimation (8) est insuffisante car d'après [1], en notant $\mathcal{E}'$ l'espace des distributions à support compact, on a :

$$\mathcal{H}(t) \cap \mathcal{E}' \subset \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(t), \quad \mathcal{H}_1(t) \cap \mathcal{E}' \not\subset \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(t).$$

De plus, pour $m > 0$, $\mathcal{H}(t)$ est inclus dans $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(t)$, mais on a

$$\sup_{0\leq t} \| U(0,t) \|_{\mathcal{L}\left(\mathcal{H}(t), \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)\right)} = \infty,$$

à cause du résultat de complétude asymptotique du Théorème III-1 de [1]. Ainsi, l'existence d'une limite finie (3) est assez surprenante. L'explication réside dans le caractère hyperbolique du problème, et les remarques précédentes ne prennent pas suffisamment en compte le phénomène de propagation du champ. Une analyse plus précise du propagateur donne la structure du champ dans $\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)$ quand $t \to \infty$:

$$U(0,t)\Phi_{BH}^t(r_*,\omega) = \Omega_{BH}^+\Phi_{BH}^+(r_*,\omega) + \frac{1}{\kappa r_*}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Phi_{BH}^-\left(2t + \frac{1}{\kappa}\ln(-r_*) - \frac{1}{\kappa}\ln(A), \omega\right) + o(1).$$

On conclut en montrant, par un calcul explicite, que :

$$\frac{1}{\kappa r_*}\Phi^-_{BH}\left(2t + \frac{1}{\kappa}\ln(-r_*) - \frac{1}{\kappa}\ln(A), \omega\right) \rightharpoonup 0 \text{ dans } \mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0) - * ,$$

$$\left\| \frac{1}{\kappa r_*}\Phi^-_{BH}\left(2t + \frac{1}{\kappa}\ln(-r_*) - \frac{1}{\kappa}\ln(A), \omega\right) \right\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}(0)} = \left\| \sqrt{\coth\left(\frac{\pi}{\kappa}\mathbb{H}^{\frac{1}{2}}_{BH}\right)}\,\Phi^-_{BH} \right\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{2}}_{BH}} .$$

Le détail des démonstrations est à paraître dans [2].

Note remise le 8 novembre 1996, acceptée le 22 novembre 1996.

Références bibliographiques

[1] **Bachelot A., 1997**. Scattering of Scalar Fields by Spherical Gravitational Collapse, *J. Math. Pures. Appl.,* 76, (2), p. 155-210.
[2] **Bachelot A., 1997**. Quantum Vacuum Polarization at the Black-Hole Horizon, *Ann. Inst. Henri-Poincarré-physique théorique* (sous presse).
[3] **Hawking S., 1975**. Particle Creation by Black-Holes, *Comm. Math. Phys.,* 43, p. 199-220.
[4] **Bratteli O. et Robinson D. W., 1981**. Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics II Springer Verlag.