Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Diffusion d'un champ scalaire par un effondrement gravitationnel

Alain BACHELOT

Résumé – On établit l'existence et la complétude des opérateurs d'onde décrivant la diffusion d'un champ scalaire par une étoile sphérique en effondrement gravitationnel.

Scattering of scalar fields by gravitational collapse

Abstract – *We prove the existence and completeness of the wave operators describing the scattering of a scalar field, massive or massless, by a collapsing spherical star.*

Cette Note, située dans le cadre des équations hyperboliques sur une variété (*cf.* [3]), traite du comportement asymptotique d'un champ de Klein-Gordon en présence d'un effondrement gravitationnel (*cf.* par exemple [4], [5], [6]). On étudie la pertubation de l'onde, due, d'une part, à la courbure de l'espace-temps, et d'autre part, à la frontière mouvante et asymptotiquement caractéristique de l'étoile, qui induit un effet Doppler *infini*. Le détail des démonstrations est à paraître dans [1].

I. UN PROBLÈME MIXTE HYPERBOLIQUE. – L'espace-temps extérieur à une étoile sphérique de masse $M > 0$, en effondrement gravitationnel, est décrit par la variété globalement hyperbolique à bord

$$\Omega = \{(t,\, r_\star,\, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^2,\ r_\star > z\,(t)\},$$

munie de la métrique de Schwarzschild

$$g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = \left(1 - \frac{2\,M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2\,M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\,\theta\, d\varphi^2),$$

$$r_\star = r + 2\,M\,\mathrm{Log}\,(r - 2\,M).$$

La surface de l'étoile définit une sous variété de genre temps $\partial\Omega$, qui est asymptotiquement caractéristique en coordonnées de Schwarzschild (création d'un trou noir). Les hypothèses naturelles sur la fonction z qui modélise l'effondrement gravitationnel sont

(H1) $$z \in C^2\,(\mathbb{R}_t), \qquad -1 < \dot{z}\,(t) \leqq 0,$$

(H2) $$z\,(t) = -t - A\,e^{-2\kappa t} + \zeta\,(t), \quad 0 < A, \qquad |\zeta\,(t)| + |\dot{\zeta}\,(t)| = O\,(e^{-4\kappa t}),$$

où $\kappa = (4\,M)^{-1}$ est la gravité surfacique. On considère le problème mixte hyperbolique pour l'équation de Klein-Gordon avec condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$:

(1) $$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r_\star}\,r^2\,\frac{\partial}{\partial r_\star} + \left(1 - \frac{2\,M}{r}\right)\left(-\frac{1}{r^2}\,\Delta_{S^2} + m^2\right)\right]\Psi = 0,$$
$$(t,\, r_\star,\, \omega) \in \Omega.$$

Note présentée par Yvonne CHOQUET-BRUHAT.

0764-4442/95/03211329 $ 2.00 © Académie des Sciences

$$\forall (t, \omega) \in \mathbb{R} \times S^2, \quad \Psi(t, z(t), \omega) = 0, \tag{2}$$

$$^t(\Psi(s), \partial_t \Psi(s)) = \Phi. \tag{3}$$

La solution de (1), (2), (3) s'exprime par un propagateur en posant $^t(\Psi(t), \partial_t \Psi(t)) = U(t, s)\Phi$ que l'on construit rigoureusement en introduisant l'espace Hilbert $\mathcal{H}(t)$ des champs d'énergie finie à l'instant t, fermeture de $[C_0^\infty(]z(t), \infty[_{r_\star} \times S_\omega^2)]^2$ pour la norme

$$\|^t(f, p)\|^2_{\mathcal{H}(t)} = \int_{z(t)}^{\infty} \int_{S^2} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial r_\star} f \right|^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{1}{r^2} |\nabla_{S^2} f|^2 + m^2 |f|^2 \right] + |p|^2 \right\} r^2 \, dr_\star \, d\omega.$$

PROPOSITION 1. – *Le propagateur $U(t, s)$ est fortement continu de $\mathcal{H}(s)$ sur $\mathcal{H}(t)$ et on a :*

$$s \leqq t \quad \Rightarrow \quad \|U(t, s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(s), \mathcal{H}(t))} = 1, \tag{4}$$

$$s < t, \; z(s) \neq z(t) \quad \Rightarrow \quad \|U(s, t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(t), \mathcal{H}(s))} > 1, \tag{5}$$

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \exists C_s > 0, \quad \forall t \geqq s, \qquad \|U(s, t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(t), \mathcal{H}(s))} \geqq C_s e^{\kappa t}, \tag{6}$$

$$\forall \Phi \in \mathcal{H}(0), \qquad \lim_{t \to +\infty} \|U(t, 0)\Phi\|_{\mathcal{H}(t)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi = 0. \tag{7}$$

Si $\Phi \in C_0^\infty(]z(s), \infty[_{r_\star} \times S_\omega^2) \times C_0^\infty(]z(s), \infty[_{r_\star} \times S_\omega^2)$ la solution Ψ appartient à $C^2(\Omega)$ et

$$\operatorname{supp} \Phi \subset]z(s), R[_{r_\star} \times S_\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{supp} \Psi(t, .) \subset]z(s), R + |t - s|[_{r_\star} \times S_\omega^2.$$

L'inégalité est une conséquence de (H1) : c'est l'effet Doppler induit par la contraction de l'étoile. La création future d'un trou noir, exprimée par (H2), entraîne que cet effet est infini comme le montre (6). Pour approfondir ce point, il est intéressant de considérer des champs ayant une singularité se propageant le long de la sous variété caractéristique $\gamma = \{(t, r_\star, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^2, \; r_\star + t = 0\}$, « asymptote » à $\partial\Omega$. On définit ainsi l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_1(t)$ fermeture de $[C_0^\infty(]z(t), \infty[_{r_\star} \times S_\omega^2)]^2$ pour la norme

$$\begin{aligned} \|^t(f, p)\|^2_{\mathcal{H}_1(t)} = \frac{1}{2} \int_{z(t)}^{-t} \int_{S^2} & |r_\star + t| \, . |\partial_{r_\star} f + p|^2 + |\partial_{r_\star} f - p|^2 \\ & + 2\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{1}{r^2} |\nabla_{S^2} f|^2 + m^2 |f|^2 \right] r^2 \, dr_\star \, d\omega \\ & + \int_{-t}^{\infty} \int_{S^2} \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial r_\star} f \right|^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{1}{r^2} |\nabla_{S^2} f|^2 + m^2 |f|^2 \right] + |p|^2 \right\} \\ & \times r^2 \, dr_\star \, d\omega. \end{aligned}$$

Grâce à l'invariance par symétrie sphérique du problème, il est commode de décomposer les champs sur la base des harmoniques sphériques $Y_{l,m}(\omega)$, $l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \leqq l$. On note $\Pi_{l,m}$ le projecteur de $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times S^2)$ sur le sous-espace $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}) \otimes Y_{l,m}$.

PROPOSITION 2. – *Pour tout $l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \leqq l$, $U(t, s)\,\Pi_{l,m}$ est un propagateur fortement continu sur $\mathcal{H}_1(s)$ et il existe $C_l > 0$ tel que :*

$$\sup_{0 \leqq t,\, s} \|U(t, s)\,\Pi_{l,m}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1(t), \mathcal{H}_1(s))} \leqq C_l < \infty.$$

De plus pour tout $\Phi \in \mathcal{H}(0)$, $\lim_{t \to +\infty} \|U(t, 0)\,\Phi\|_{\mathcal{H}(t)}$ existe et vérifie

$$C_l^{-1}\|\Pi_{l,m}\,\Phi\|_{\mathcal{H}_1(0)} \leqq \lim_{t \to +\infty} \|U(t, 0)\,\Pi_{l,m}\,\Phi\|_{\mathcal{H}(t)} \leqq C_l\|\Pi_{l,m}\,\Phi\|_{\mathcal{H}_1(0)}. \tag{8}$$

La relation (8) permettra d'exprimer la complétude asymptotique des opérateurs d'onde. Nous conjecturons que la suite C_l est bornée et que $\lim_{t \to +\infty} \|U(t, s)\,\Phi\|_{\mathcal{H}(t)}$ est une norme équivalente sur $\mathcal{H}_1(s)$.

II. OPÉRATEURS D'ONDE. – Quand $t \to \infty$, $r \to \infty$, nous comparons les solutions de (1), (2) avec les solutions de l'équation de Klein-Gordon dans l'espace-temps de Minkowski

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\Psi_\infty - \Delta_{\mathbb{R}^3_x}\Psi_\infty + m^2\,\Psi_\infty = 0, \quad \Delta_{\mathbb{R}^3_x} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \qquad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

A l'infini spatial, le terme $-2\,M m^2\,r^{-1}$ dans (1) est une perturbation de longue portée de (9). Comme dans le cas statique étudié dans [2], on introduit une modification à la Dollard de la dynamique libre. Soit $\mathcal{H}_\infty$ l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_\infty = H^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3), \ \|{}^t(f, p)\|^2_{\mathcal{H}_\infty} = \int_{\mathbb{R}^3_x} \{|\nabla_{\mathbb{R}^3_x} f(x)|^2 + m^2|f(x)|^2 + |p(x)|^2\}\,dx,$$

et $U^D_\infty(t)$ est le propagateur unitaire défini pour $t \neq 0$ par

$$U^D_\infty(t) = \begin{bmatrix} \cos(t\,B_\infty + D\,\log t) & B_\infty^{-1}\sin(t\,B_\infty + D\,\log t) \\ -B_\infty\,\sin(t\,B_\infty + D\,\log t) & \cos(t\,B_\infty + D\,\log t) \end{bmatrix},$$

$$B_\infty = (-\Delta_{\mathbb{R}^3_x} + m^2)^{1/2}, \qquad D = -M\,m^2|\nabla_{\mathbb{R}^3_x}|^{-1}, \qquad \mathrm{Log}\,t \equiv \mathrm{sign}\,(t)\,\mathrm{Log}|t|.$$

On choisit une fonction régulière de troncature χ telle que

$$\begin{cases} \chi \in C^\infty(\mathbb{R}_{r_\star}), & r_\star < c \quad \Rightarrow \quad \chi(r_\star) = 0, \\ \qquad r_\star > d & \Rightarrow \quad \chi(r_\star) = 1, \qquad 0 < c < d, \end{cases} \tag{10}$$

et on définit un opérateur $\mathcal{I}^\chi_\infty$ de $\mathcal{H}(t)$ dans $\mathcal{H}_\infty$ en identifiant la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^3$ avec $r_\star \geqq 0$, ce qui évite des interactions de longue portée artificielles, et en posant

$$\Phi \in \mathcal{H}(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \qquad (\mathcal{I}^\chi_\infty(t)\,\Phi)(x) = \chi(r_\star)\,\Phi(r_\star, \omega), \qquad r_\star = |x|,\ \omega = |x|^{-1}\,x.$$

On considère l'opérateur d'onde à l'infini futur W^{out}_∞

$$\Phi \in \mathcal{H}(0), \qquad W^{\mathrm{out}}_\infty\,\Phi = \lim_{t \to +\infty} U^D_\infty(-t)\,\mathcal{I}^\chi_\infty(t)\,U(t, 0)\,\Phi \quad \text{dans } \mathcal{H}_\infty. \tag{11}$$

Près de l'horizon futur du trou noir, $\{t = +\infty\} \times \{r = 2M\} \times S^2_\omega$, nous comparons les solutions de (1), (2) avec des champs d'ondes planes solutions de

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\Psi_{BH} - \frac{\partial^2}{\partial r_\star^2}\,\Psi_{BH} = 0, \qquad t,\, r_\star \in \mathbb{R}, \quad \omega \in S^2. \tag{12}$$

On introduit : l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{BH}$, fermeture de $[C_0^\infty(\mathbb{R}_{r_\star} \times S^2_\omega)]^2$ pour la norme

$$\|^t(f,\,p)\|^2_{\mathcal{H}_{BH}} = 4\,M^2 \int \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial r_\star} f \right|^2 + |p|^2 \right\} dr_\star\, d\omega,$$

la fermeture $\mathcal{A}_{BH}$ de $\{^t(f,\,(\partial/\partial r_\star)\,f),\, f \in C_0^\infty(]-\infty,\,\infty[_{r_\star} \times S^2_\omega),\, f(r_\star,\,\omega) = 0$ pour $r_\star \leqq 0\}$, et le groupe unitaire $U_{BH}(t)$ défini sur $\mathcal{H}_{BH}$ par

$$\Phi_{BH} \in \mathcal{H}_{BH},\; [U_{BH}(t)\,\Phi_{BH}]\,(r_\star,\,\omega) = \Phi_{BH}\,(t + r_\star,\,\omega).$$

Étant donné χ satisfaisant (10), on définit l'opérateur $\mathcal{I}^\chi_{BH}(t)$ de $\mathcal{H}(t)$ dans $\mathcal{H}_{BH}$ par

$$r_\star \geqq z(t) \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{I}^\chi_{BH}(t)\,\Phi]\,(r_\star,\,\omega) = (1 - \chi(r_\star))\,\Phi\,(r_\star,\,\omega),$$
$$r_\star \leqq z(t) \quad \Rightarrow \quad [\mathcal{I}^\chi_{BH}(t)\,\Phi]\,(r_\star,\,\omega) = 0.$$

On introduit l'opérateur d'onde à l'horizon futur du trou noir, W^{out}_{BH} :

$$(13) \qquad \Phi \in \mathcal{H}(0), \qquad W^{\text{out}}_{BH}\,\Phi = \lim_{t\to+\infty} U_{BH}(-t)\,\mathcal{I}^\chi_{BH}(t)\,U(t,\,0)\,\Phi \quad \text{dans } \mathcal{H}_{BH}.$$

THÉORÈME. – *Les limites* (11) *et* (13) *existent, ne dépendent pas du choix de χ satisfaisant* (10), *et définissent une contraction à image dense, $W^{\text{out}}_{BH} \oplus W^{\text{out}}_\infty$, de $\mathcal{H}(0)$ dans $\mathcal{A}_{BH} \oplus \mathcal{H}_\infty$. De plus $W^{\text{out}}_{BH} \oplus W^{\text{out}}_\infty$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme de $\Pi_{l,\,m}\,[\mathcal{H}_1(0)]$ sur $\Pi_{l,\,m}\,[\mathcal{A}_{BH} \oplus \mathcal{H}_\infty]$.*

C'est la relation (8) qui permet d'étendre les opérateurs d'ondes à $\Pi_{l,\,m}\,[\mathcal{H}_1(0)]$. Notons que l'effet Doppler infini a un effet régularisant en effaçant à $t = \infty$ la singularité portée par γ : les champs diffractés, dans l'image de $\Pi_{l,\,m}\,[\mathcal{H}_1(0)]$, sont localement $H^1 \times L^2$.

Note remise le 15 septembre 1995, acceptée le 22 septembre 1995.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. BACHELOT, *Scattering of Scalar Fields by Spherical Gravitational Collapse* (à paraître).

[2] A. BACHELOT, Asymptotic Completeness for the Klein-Gordon Equation on the Schwarzschild Metric, *Ann. Inst. H. Poincaré-Phys. Théor.*, 61, 4, 1994, p. 411-441.

[3] Y. CHOQUET-BRUHAT, Hyperbolic partial differential equations on a manifold, in: *Battelle rencontres*, DE WITT WHEELER éd., New York, Benjamin, 1967.

[4] D. CHRISTODOULOU, The Formation of Black-Holes and Singularities in Spherically Gravitational Collapse, *Comm. Pure Appl. Math.*, 44, 1991, p. 339-373.

[5] K. FREDENHAGEN et R. HAAG, On the Derivation of Hawking Radiation Associated with the Formation of a Black Hole, *Comm. Math. Phys.*, 127, 1990, p. 273-284.

[6] S. W. HAWKING et G. F. R. ELLIS, *The large scale structure of space time*, Cambridge Univ. Press, 1973.

Université Bordeaux-I,
CNRS, Laboratoire de Mathématiques Appliquées,
351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France.
E-mail: bachelot@math.u-bordeaux.fr