Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Opérateurs de diffraction classique et quantique pour l'équation de Klein-Gordon en métrique de Schwarzschild

Alain BACHELOT

Résumé – Nous démontrons la complétude asymptotique forte des opérateurs d'onde, classiques à l'horizon, modifiés à la Dollard à l'infini, décrivant la diffraction d'un champ de Klein-Gordon massif par un trou noir de Schwarzschild. L'opérateur de diffraction est unitairement représentable dans l'espace de Fock des champs libres.

Classic and quantum scattering operators for the Klein-Gordon equation on the Schwarzschild metric

Abstract – *We prove the strong asymptotic completeness of the wave operators, classic at the horizon and Dollard-modified at infinity, describing the scattering of the massive Klein-Gordon field by a Schwarzschild black-hole. The scattering operator is unitarily implementable in Fock space of free fields.*

Un champ scalaire Ψ de masse $m > 0$ en métrique de Schwarzschild associée à un trou noir de masse $\mathrm{M} > 0$, est solution de l'équation de Klein-Gordon

$$(1)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \left[\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r_*} r^2 \dfrac{\partial}{\partial r_*} + \left(1 - \dfrac{2\mathrm{M}}{r}\right)\left(-\dfrac{1}{r^2}\Delta_{\mathrm{S}^2} + m^2\right)\right]\Psi = 0, \\ \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad r_* \in \mathbb{R}, \qquad \omega \in \mathrm{S}^2; \end{array}\right.$$

où Δ_{S^2} est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur S^2 et $r > 2\,\mathrm{M}$ est une fonction implicite de $r_* = r + 2\mathrm{M}\,\mathrm{Log}\,(r - 2\,\mathrm{M})$. On écrit (1) sous forme hamiltonienne en posant

$$(2)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{U} = {}^t(\Psi,\, \partial_t\Psi), \qquad \dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} = -i\,\mathrm{H}\mathrm{U}, \qquad \mathrm{H} = \dfrac{1}{i}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ h & 0 \end{bmatrix}, \\ h = -\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r_*} r^2 \dfrac{\partial}{\partial r_*} + \left(1 - \dfrac{2\,\mathrm{M}}{r}\right)\left(-\dfrac{1}{r^2}\Delta_{\mathrm{S}^2} + m^2\right). \end{array}\right.$$

H est un opérateur autoadjoint de domaine dense sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ des données d'énergie finie, complété de $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{r_*} \times \mathrm{S}^2_\omega) \times \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{r_*} \times \mathrm{S}^2_\omega)$ pour la norme

$$\|{}^t(f,\, g)\|^2_{\mathcal{H}} = \int \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial r_*} f \right|^2 + \left(1 - \frac{2\,\mathrm{M}}{r}\right)\left[\frac{1}{r^2}|\nabla_{\mathrm{S}^2} f|^2 + m^2|f|^2\right] + |g|^2 \right\} r^2\, dr_*\, d\omega.$$

Les solutions de (2) dans $\mathrm{C}^0(\mathbb{R}_t,\, \mathcal{H})$ s'expriment donc par un groupe unitaire $\mathrm{U}(t)$ sur $\mathcal{H}$.

Près de l'horizon du trou noir $\{r = 2\,\mathrm{M}\} \times \mathrm{S}^2_\omega$ nous comparons les solutions de (1) avec les ondes planes $\Psi_0(t,\, r_*,\, \omega)$ solutions de

$$(3)\qquad \partial_t^2\,\Psi_0 - \partial_{r_*}^2\,\Psi_0 = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad r_* \in \mathbb{R}, \qquad \omega \in \mathrm{S}^2,$$

en introduisant les espaces de Hilbert $\mathcal{H}_0^\pm$ complétés des espaces des données rentrantes/sortantes $\mathcal{D}_0^\pm$

$$\mathcal{D}_0^\pm = \left\{ {}^t\!\left(f_1(r_*,\, \omega),\, \pm\frac{\partial}{\partial r_*} f_1(r_*,\, \omega)\right),\, f_1 \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}_{r_*} \times \mathrm{S}^2_\omega) \right\},$$

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0764-4442/94/03190041 $ 2.00 © Académie des Sciences

pour la norme d'énergie libre

$$\| {}^t(f,\, g)\|^2_{\mathcal{H}_0^\pm} = 4\,\mathrm{M}^2 \int \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial r_*} f \right|^2 + |g|^2 \right\} dr_*\, d\omega,$$

et le groupe unitaire $\mathrm{U}_0(t)$ sur $\mathcal{H}_0^+ \oplus \mathcal{H}_0^-$ défini par

$$\mathrm{F}_0^\pm \in \mathcal{D}_0^\pm, \qquad \mathrm{U}_0(t)\, \mathrm{F}_0^\pm = \mathrm{F}_0^\pm(\pm t + r_*,\, \omega).$$

On construit un opérateur d'identification (non borné) $\mathcal{I}_0$ entre $\mathcal{D}_0^+ \oplus \mathcal{D}_0^-$ et $\mathcal{H}$ en posant

$$\mathrm{F}_0^\pm = {}^t(f,\, g) \in \mathcal{D}_0^\pm, \qquad (\mathcal{I}_0\, \mathrm{F}_0^\pm)(r_*,\, \omega) = {}^t(\chi_0(r_*)\, f(r_*,\, \omega),\ \chi_0(r_*)\, g(r_*,\, \omega)),$$

où χ_0 est choisi tel que

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \chi_0 \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}_{r_*}), & r_* < a \quad \Rightarrow \chi_0(r_*) = 1, \\ & r_* > b \quad \Rightarrow \chi_0(r_*) = 0, \qquad a < b. \end{cases}$$

Les opérateurs d'onde à l'horizon $\mathrm{W}_0^\pm$ sont définis par

$$\mathrm{F}_0^\pm \in \mathcal{D}_0^\pm, \qquad \mathrm{W}_0^\pm\, \mathrm{F}_0 = s\text{-}\lim_{t \to \pm\infty}\ \mathrm{U}(-t)\, \mathcal{I}_0\, \mathrm{U}_0(t)\, \mathrm{F}_0^\pm \quad \text{dans } \mathcal{H}.$$

A l'infini le terme $2\,\mathrm{M}\, m^2\, r^{-1}$ dans (1) est une perturbation de *longue portée* de l'équation de Klein-Gordon dans l'espace temps de Minkowski:

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, \Psi_\infty - \Delta_{\mathbb{R}^3_x}\, \Psi_\infty + m^2\, \Psi_\infty = 0,$$

Suivant [3] nous comparons les solutions de (1) à l'infini avec des champs évoluant dans l'espace de Minkowski selon une dynamique modifiée à la Dollard définie par

$$\mathrm{U}_\infty^{\mathrm{D}}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t\,\mathrm{B}_\infty + \mathrm{D}\log t) & \mathrm{B}_\infty^{-1} \sin(t\,\mathrm{B}_\infty + \mathrm{D}\log t) \\ -\mathrm{B}_\infty \sin(t\,\mathrm{B}_\infty + \mathrm{D}\log t) & \cos(t\,\mathrm{B}_\infty + \mathrm{D}\log t) \end{bmatrix}, \qquad t \neq 0,$$

$$\mathrm{B}_\infty = (-\Delta_{\mathbb{R}^3_x} + m^2)^{1/2}, \qquad \mathrm{D} = -\mathrm{M}\, m^2 |\nabla_{\mathbb{R}^3_x}|^{-1}, \qquad \log t \equiv \operatorname{sign}(t) \log|t|,$$

sur l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_\infty = \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^3_x) \times \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3_x,\, dx), \qquad \| {}^t(f,\, g)\|^2_{\mathcal{H}_\infty} = \|\nabla_{\mathbb{R}^3_x} f\|^2_{\mathrm{L}^2} + m^2 \|f\|^2_{\mathrm{L}^2} + \|g\|^2_{\mathrm{L}^2}.$$

On considère aussi le groupe unitaire $\mathrm{U}_\infty(t)$ associé à (5)

$$\mathrm{U}_\infty(t) = \begin{bmatrix} \cos(t\,\mathrm{B}_\infty) & \mathrm{B}_\infty^{-1} \sin(t\,\mathrm{B}_\infty) \\ -\mathrm{B}_\infty \sin(t\,\mathrm{B}_\infty) & \cos(t\,\mathrm{B}_\infty) \end{bmatrix}.$$

On introduit le sous-espace dense $\mathcal{D}_\infty$ des paquets d'onde réguliers de $\mathcal{H}_\infty$

$$\mathcal{D}_\infty = \{ {}^t(f_1,\, f_2) \in \mathcal{H}_\infty;\ \mathcal{F} f_j \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3_\xi \backslash \{0\}) \}.$$

On construit un opérateur $\mathcal{I}_\infty$ entre $\mathcal{H}_\infty$ et $\mathcal{H}$ par troncature et identification :

$$\mathrm{F}_\infty \in \mathcal{H}_\infty, \qquad 0 \leqq r_* \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{I}_\infty \mathrm{F}_\infty)(r_*,\, \omega) = \chi_\infty(r_*)\, \mathrm{F}_\infty(x = r_*\, \omega),$$

$$r_* \leqq 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{I}_\infty\, \mathrm{F}_\infty)(r_*,\, \omega) = 0,$$

$$(6)\quad \begin{cases} \chi_\infty \in C^\infty(\mathbb{R}_{r_*}), & r_* < c \quad \Rightarrow \quad \chi_\infty(r_*) = 0, \\ r_* > d \quad \Rightarrow \quad \chi_\infty(r_*) = 1, & 0 < c < d, \end{cases}$$

et on définit l'opérateur d'onde modifié $W_\infty^\pm$

$$F_\infty \in \mathcal{D}_\infty, \quad W_\infty^\pm F_\infty = s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} U(-t)\,\mathcal{I}_\infty\,U_\infty^D(t)\,F_\infty \quad \text{dans } \mathcal{H}.$$

L'existence de ces opérateurs a été établie par Dimock et Kay [3] qui laissèrent ouvert le problème de leur complétude asymptotique, rendu délicat par l'interaction de longue portée. Notre présente contribution consiste à prouver cette complétude et obtenir ainsi l'existence de l'opérateur de diffraction S.

THÉORÈME 1. – *Pour tout* $F_0^\pm \in \mathcal{D}_0^\pm$, $F_\infty \in \mathcal{D}_\infty$, *les limites* $W_0^\pm F_0^\pm$ *et* $W_\infty^\pm F_\infty$ *existent dans* $\mathcal{H}$ *et sont indépendantes de* χ_0 *et* χ_∞ *satisfaisant* (4) (6). *De plus on a :*

$$\|W_0^\pm F_0^\pm\|_{\mathcal{H}} = \|F_0^\pm\|_{\mathcal{H}_0^\pm}, \qquad \|W_\infty^\pm F_\infty\|_{\mathcal{H}} = \|F_\infty\|_{\mathcal{H}_\infty},$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U(t)\,W_0^\pm F_0^\pm = W_0^\pm U_0(t)\,F_0^\pm, \qquad U(t)\,W_\infty^\pm F_\infty = W_\infty^\pm U_\infty(t)\,F_\infty,$$

et on a la complétude asymptotique forte : $W_0^\pm \oplus W_\infty^\pm$ *est à image dense dans* $\mathcal{H}$. *On définit alors l'opérateur de diffraction* S

$$(7)\qquad S = (W_0^+ \oplus W_\infty^+)^{-1} \cdot (W_0^- \oplus W_\infty^-)$$

qui est une isométrie de $\mathcal{H}_0^- \oplus \mathcal{H}_\infty$ *sur* $\mathcal{H}_0^+ \oplus \mathcal{H}_\infty$ *et satisfait la propriété d'entrelacement*

$$(8)\qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad [U_0(t) \oplus U_\infty(t)] \cdot S = S \cdot [U_0(t) \oplus U_\infty(t)].$$

Nous esquissons l'idée de la preuve. Tout d'abord on considère les racines carrées $[h]^{1/2}$, $[h_0]^{1/2}$, B_∞, et on construit les opérateurs d'onde associés sur $L^2(\mathbb{R}_{r_*} \times S^2_\omega, r^2\,dr_*\,d\omega)$. A cette fin on découple l'étude à l'horizon de l'étude à l'infini en comparant (1) avec le problème de Dirichlet pour la même équation avec condition de Dirichlet homogène $\Psi = 0$ sur la sphère $\{r_* = 0\}$; ceci constitue une perturbation de courte portée du problème initial. D'une part, comme $(1 - 2M\,r^{-1})$ est exponentiellement décroissant pour $r_* \to -\infty$, (3) est une perturbation de courte portée de (1) sur $]-\infty, 0[_{r_*}$, ainsi l'existence et la complétude des opérateurs d'onde à l'horizon $r = 2M$ sont conséquences du théorème de Kato-Birman et du principe d'invariance. D'autre part, le problème à l'infini se ramène à l'étude de la perturbation de longue portée de l'équation de Klein-Gordon (5) par le potentiel $-2M\,m^2|x|^{-1}$. Nous prouvons l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'onde à l'infini en utilisant les résultats de Kitada [4] sur l'équation de Schrödinger et le principe d'invariance pour les potentiels de longue portée. Pour établir la complétude asymptotique *forte* nous décomposons (1) sur la base des harmoniques sphériques et concluons en notant que l'analyticité de l'interaction gravitationnelle établie dans [2] assure que le spectre de l'opérateur

$$-\partial_{r_*}^2 + (1 - 2M\,r^{-1})\,[l\,(l+1)\,r^{-2} + 2M\,r^{-3} + m^2]$$

est absolument continu sur $L^2(\mathbb{R}_{r_*})$. Nous déduisons des résultats précédents l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'onde pour les équations (1), (3), (5), en utilisant la technique de Kato, dite des deux espaces de Hilbert.

L'unitarité de S et la relation (8) permettent de construire par la méthode de seconde quantification l'opérateur de diffraction des champs quantiques. Une quantification associée à (3) (5) est une application $\mathrm{Q}^{\pm} : \mathrm{F}_0^{\pm} \oplus \mathrm{F}_{\infty} \to \mathrm{Q}^{\pm}(\mathrm{F}_0^{\pm} \oplus \mathrm{F}_{\infty})$ de $\mathcal{H}_0^{\pm} \oplus \mathcal{H}_{\infty}$, muni d'une structure symplectique, dans l'espace des opérateurs unitaires d'un espace de Hilbert $\mathfrak{H}$, satisfaisant la forme exponentielle de Weyl des relations de commutation canoniques. La plus importante, assurant l'invariance relativiste et la positivité de l'énergie, est la quantification de Fock-Cook $\mathrm{Q}_{\Phi}^{\pm}$ (*voir* [1]). Si $\mathrm{T} : \mathcal{H}_0^{-} \oplus \mathcal{H}_{\infty} \to \mathcal{H}_0^{+} \oplus \mathcal{H}_{\infty}$ est symplectique, $\mathrm{Q}_{\Phi}^{+}\mathrm{T}$ est une autre quantification; T est dite *unitairement représentable* dans l'espace de Fock si $\mathrm{Q}_{\Phi}^{+}\mathrm{T}$ est unitairement équivalente à Q_{Φ}^{-}, c'est-à-dire, s'il existe un opérateur unitaire $\mathbb{S}$ sur $\mathfrak{H}$ tel que

$$\mathrm{Q}_{\Phi}^{+}\,\mathrm{T}(\,\cdot\,) = \mathbb{S}\,\mathrm{Q}_{\Phi}^{-}(\,\cdot\,)\,\mathbb{S}^{-1}. \tag{9}$$

THÉORÈME 2. – *L'opérateur de diffraction classique* S *défini par* (7) *est unitairement représentable dans l'espace de Fock.*

L'opérateur $\mathbb{S}$ associé à S par (9) détermine la diffraction quantique par un trou noir. La preuve de ce résultat et l'ensemble des démonstrations sont détaillés dans [1].

Note remise le 6 avril 1994, acceptée le 24 mai 1994.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. BACHELOT, Asymptotic Completeness for the Klein-Gordon Equation on the Schwarzschild Metric, *prépubl. URA 226*, 1993.

[2] A. BACHELOT et A. MOTET-BACHELOT, Les résonances d'un trou noir de Schwarzschild, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, 59, n° 1, 1993, p. 3-68.

[3] J. DIMOCK et B. S. KAY, Scattering for massive scalar fields on coulomb potentials and Schwarzschild metrics, *Class. Quantum Grav.*, 3, 1986, p. 71-80.

[4] H. KITADA, Scattering theory for Schrödinger operators with long range potentials, II, spectral and scattering theory, *J. Math. Soc. Japan*, 30, 4, 1978, p. 603-632.

Département de mathématiques appliquées, Université Bordeaux-I, CeReMaB, Unité associée au CNRS n° 226, 33405 Talence, France.