C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, Série I, p. 1047-1050, 1993

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Équation non linéaire de Klein-Gordon dans des métriques de type Schwarzschild

Alain BACHELOT et Jean-Philippe NICOLAS

Résumé – On résout le problème de Cauchy global pour l'équation non linéaire de Klein-Gordon à l'extérieur d'un trou noir sphérique. On établit l'existence d'un champ de radiation rentrante à l'horizon du trou noir (condition d'impédance de T. Damour). Si l'espace-temps est asymptotiquement plat, les champs sans masse vérifient à l'infini la condition de radiation sortante de Sommerfeld.

Non Linear Klein Gordon Equation on Schwarzschild type Metric

Abstract – *We solve the global Cauchy problem for the non linear Klein-Gordon equation outside a spherical Black Hole. On the Black Hole horizon the field satisfies the impedance condition of T. Damour. If the space time is asymptotically flat, the massless fields satisfy the Sommerfeld condition at infinity.*

INTRODUCTION. – Le comportement asymptotique des solutions globales de l'équation non linéaire de Klein-Gordon dans l'espace-temps de Minkowski, $\square u+m^2 u+\lambda |u|^2 u=0$, $0\leqq\lambda$, est maintenant bien connu (*cf.* par exemple J. Ginibre et G. Velo [9], W. Strauss [12]). Les scénarios inflatoires de la cosmologie quantique, avec brisure de symétrie d'un champ de Higgs, accroissent l'intérêt de l'étude de cette équation dans des espaces-temps courbes. Le problème de Cauchy sur une variété globalement hyperbolique suffisamment régulière $\mathbb{R}_t\times V_x$ est résolu par F. Cagnac et Y. Choquet-Bruhat [4]. Nous nous proposons ici d'établir des résultats analogues dans des espaces-temps à symétrie sphérique de type *trou noir*, *i. e.* les courbes $x=\mathrm{Cst}$ ne sont pas uniformément temporelles au voisinage d'un *horizon*. Le problème de Cauchy pour le système de Yang Mills en métrique de Schwarzschild est résolu par W. T. Shu [10] par les méthodes délicates de D. Christodoulou et S. Klainerman qui nécessitent que le champ soit sans masse et les données initiales petites et très régulières. Nous traitons ici le cas plus simple de l'équation de Klein-Gordon par une démarche classique dans l'esprit de [4], [5], [6], [13] : une injection de Sobolev sur une variété riemannienne et la conservation de l'énergie assurent l'existence globale de solutions arbitrairement grandes de régularité minimale; un changement de coordonnées de type Kruskal (resp. Penrose) permet l'étude du champ au voisinage de l'horizon (resp. de l'infini).

Considérons la variété $\mathbb{R}_t\times\,]0, +\infty[_r\times S^2_{\theta,\varphi}$ munie de la métrique pseudoriemannienne

$$g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu=F(r)\,e^{2\delta(r)}\,dt^2-[F(r)^{-1}\,dr^2+r^2\,d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2] \tag{1}$$

où F et δ sont dans $C^\infty(]0, +\infty[_r)$. On suppose que F admet au plus trois zéros r_ν, $0\leqq r_- < r_0 < r_+ \leqq +\infty$, tels que

$$F(r)>0 \quad \text{pour } r\in\,]r_0, r_+[, \qquad F(r)<0 \quad \text{pour } r\in\,]r_-, r_0[,$$

et

$$F(r_\nu)=0, \quad F'(r_\nu)=2\kappa_\nu\neq 0, \quad \text{pour } r_\nu \text{ fini et non nul}, \quad \nu=0, +, -,$$

r_ν situant respectivement l'horizon du trou noir (r_0) et, s'ils existent, l'horizon cosmologique ($r_+<\infty$) et l'horizon de Cauchy ($r_->0$); κ_ν est la gravité de surface à

Note présentée par Yvonne CHOQUET-BRUHAT.

0764-4442/93/03161047 $ 2.00 © Académie des Sciences

l'horizon $\{r=r_v\}$. Si $r_+=\infty$ on suppose de plus que δ admet une limite à l'infini et que :

$$\mathrm{F}(r)=1-r^{-1}r_1+O(r^{-2}),\quad r_1>0,$$

$$\delta(r)-\delta(\infty)=o(r^{-1}),\qquad \partial_r^k\mathrm{F}(r)\quad \text{et}\quad \partial_r^k\delta(r)=O(r^{-k-1}),\qquad 1\leqq k\leqq 3,\quad r\to\infty.$$

Ces propriétés sont vérifiées par tous les modèles de trous noirs sphériques : en posant

$$(2)\qquad \delta=0,\qquad \mathrm{F}(r)=1-2\mathrm{M}r^{-1}+\gamma_{pq}\mathrm{Q}^p\mathrm{Q}^q r^{-2}+\Lambda r^2/3,$$

on retrouve avec un choix convenable des coefficients les solutions de Schwarzschild, Reissner-Nordström, Yasskin, asymptotiquement plates $(\Lambda=0)$ ou De Sitter $(\Lambda\neq 0)$, où M, Q^p, γ_{pq}, Λ, s'interprètent comme la masse, la charge de jauge, la métrique invariante sur le groupe de Lie, et la constante cosmologique. L'introduction de la fonction δ permet de considérer les trous noirs chromatiques non abéliens ([3], [11]).

Nous étudions l'équation non linéaire des champs de spin zéro et de masse $m\geqq 0$

$$(3)\qquad \square_g u+m^2u+\xi\mathrm{R}u+\lambda|u|^2u=0,\qquad 0\leqq\lambda,\quad \xi\in\mathbb{R},$$

où $\square_g$ et R sont le D'Alembertien et la courbure scalaire associés à la métrique (1). En introduisant la coordonnée de Wheeler r_* reliée à r par la relation $dr/dr_*=\mathrm{F}e^{\delta}$, $f=ru$ vérifie l'équation :

$$(4)\qquad \{\partial_t^2-\partial_{r_*}^2+\mathrm{F}e^{2\delta}[-r^{-2}\Delta_{\mathrm{S}^2}+m^2+r^{-1}e^{-\delta}\partial_r(\mathrm{F}e^{\delta})+\xi\mathrm{R}+\lambda r^{-2}|f|^2]\}f=0,$$

où Δ_{S}^2 est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la sphère S^2. Pour que l'énergie soit positive à l'extérieur du trou noir on fait l'hypothèse :

$$(\mathrm{H1})\qquad m^2+r^{-1}e^{-\delta}\partial_r(\mathrm{F}e^{\delta})+\xi\mathrm{R}>0\qquad \text{pour}\quad r\in[r_0,r_+];$$

cette condition est satisfaite pour les modèles donnés par (2) avec $m=0$ et $\xi=-1/6$ si $\Lambda\neq 0$; dans le cas des trous noirs chromatiques de ([3], [11]) nous avons vérifié (H1) par une expérimentation numérique pour $m=0$, et $\xi=0$, $-1/6$.

Problème de Cauchy extérieur. — On introduit l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$ des champs d'énergie finie, complété de $[\mathrm{C}_0^\infty(]r_0,r_+[\times\mathrm{S}_\omega^2)]^2$ pour la norme :

$$\varphi,\psi\in\mathrm{C}_0^\infty(]r_0,r_+[\times\mathrm{S}_\omega^2),\qquad \|(\varphi,\psi)\|^2=\int|\partial_{r_*}\varphi|^2+\mathrm{F}r^{-2}|\nabla_{\mathrm{S}^2}\varphi|^2+|\varphi|^2+|\psi|^2\,dr_*\,d\omega.$$

Le contrôle de φ dans L^2 rend *a priori* cette norme légèrement plus forte que la norme d'énergie associée à l'équation libre, mais permet d'estimer la non linéarité.

Théorème 1. — *Étant donné* (φ,ψ) *dans* $\mathscr{H}$, *il existe une unique solution* f *de* (4) *vérifiant*

$$(5)\qquad (f,\partial_t f)\in\mathrm{C}^0(\mathbb{R}_t,\mathscr{H}),\qquad (f,\partial_t f)|_{t=0}=(\varphi,\psi);$$

si de plus $\varphi,\psi\in\mathrm{C}_0^\infty(]r_0,r_+[\times\mathrm{S}_\omega^2)$, *alors* $f\in\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}_t\times]r_0,r_+[\times\mathrm{S}_\omega^2)$.

Preuve. — Considérant la variété riemannienne

$$(\mathrm{V}=]r_0,r_+[\times\mathrm{S}_\omega^2,\ ds^2=\mathrm{F}(r)^{-1}dr^2+r^2d\omega^2)$$

on montre que son rayon d'injectivité est uniformément minoré et que ses courbures sectionnelles sont bornées; un théorème d'injection de Sobolev [1] assure alors que $\mathrm{H}^1(\mathrm{V})\subset\mathrm{L}^6(\mathrm{V})$, ce qui permet de résoudre le problème de Cauchy local. On obtient l'existence globale par la conservation de l'énergie $\mathscr{E}(t)=\mathscr{E}(0)$:

$$\mathscr{E}=\int\{|\partial_t f|^2+|\partial_{r_*}f|^2+\mathrm{F}e^{2\delta}[r^{-2}|\nabla_{\mathrm{S}^2}f|^2+(m^2+r^{-1}e^{-\delta}\partial_r(\mathrm{F}e^{\delta})+\xi\mathrm{R})|f|^2+2^{-1}\lambda r^{-2}|f|^4]\}\,dr_*\,d\omega.$$

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE AUX HORIZONS. — Quitte à faire une dilatation en t on suppose $\delta(r_0)=0$. Pour franchir l'horizon du trou noir on fait un changement de variables de type Kruskal-Szekeres en posant

$$X=2^{-1}e^{\varkappa_0 r_*}(e^{\eta\varkappa_0 t}+\eta e^{-\eta\varkappa_0 t}),\qquad T=2^{-1}e^{\varkappa_0 r_*}(e^{\eta\varkappa_0 t}-\eta e^{-\eta\varkappa_0 t}),\qquad \eta=(r-r_0)\,|r-r_0|^{-1}$$

où r_* est défini sur $]r_-, r_+[$ par la formule

$$r_*=2^{-1}\kappa_0^{-1}\Big\{\mathrm{Log}\,|r-r_0|-\int_{r_0}^{r}[(r-r_0)^{-1}-2\kappa_0 F^{-1}e^{-\delta}]\,dr\Big\}.$$

L'équation (4) sur $\mathbb{R}_t\times V$ est équivalente à

$$\{\partial_T^2-\partial_X^2+\kappa_0^{-2}|F|e^{-2\varkappa_0 r_*+2\delta}[-r^{-2}\Delta_{S^2}+m^2+r^{-1}e^{-\delta}\partial_r(Fe^{\delta})+\xi R+\lambda r^{-2}|f|^2]\}f=0 \tag{6}$$

dans le domaine $\Omega=\{(T, X, \omega),\ X\geqq|T|,\ \omega\in S^2\}$ au voisinage duquel r et $\kappa_0^{-2}|F|e^{-2\varkappa_0 r_*+2\delta}$ sont des fonctions continues de (T, X). En résolvant le problème de Cauchy associé à (6) sur Ω on obtient le comportement asymptotique du champ quand $r\to r_0$, $t\to\infty$ qui exprime la continuité de la solution f de (6) à l'horizon $X=|T|$:

THÉORÈME 2. — *Étant donné* φ, ψ *dans* $C_0^\infty(]r_0, r_+[\times S_\omega^2)$, *il existe* $\hat f$ *dans* $C^\infty(\mathbb{R}_s\times S_\omega^2)$ *tel que pour tout* (s,ω) *de* $\mathbb{R}_s\times S_\omega^2$, *la solution* f *de* (4), (5) *vérifie* :

$$\lim_{t\to+\infty} f(t, r_*=-t+s, \omega)=\hat f(s,\omega),\qquad \lim_{t\to+\infty}(\partial_t-\partial_{r_*})f(t, r_*=-t+s,\omega)=0. \tag{7}$$

La propriété (7) est l'analogue, pour l'équation non linéaire de Klein-Gordon, de la *condition d'impédance* de T. Damour ([7], [2]). Si r_+ est fini, on analyse de façon identique le comportement asymptotique à l'horizon cosmologique : le champ y vérifie la condition de radiation sortante de Sommerfeld :

$$\lim_{t\to+\infty}(\partial_t+\partial_{r_*})f(t, r_*=t+s,\omega)=0.$$

Si l'hypothèse de positivité (H1) est vraie pour $r\in]r_-, r_+]$ la solution se prolonge à ce domaine; nous laissons ouvert le problème délicat du comportement du champ à l'horizon de Cauchy $r=r_-$.

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE À L'INFINI. — Supposant $r_+=\infty$, on reprend la technique de compactification conforme de Penrose utilisée dans ([5], [6]). Quitte à faire une dilatation en t on suppose $\delta(\infty)=0$. En posant

$$\tau=\mathrm{Arctg}(t+r_*)+\mathrm{Arctg}(t-r_*),\qquad \zeta=\mathrm{Arctg}(t+r_*)-\mathrm{Arctg}(t-r_*),$$

l'équation (4) sur $\mathbb{R}_t\times V$ avec $m=0$ devient :

$$[\partial_\tau^2-\partial_\zeta^2+F e^{2\delta}(\cos\tau+\cos\zeta)^{-2}[-r^{-2}\Delta_{S^2}+r^{-1}e^{-\delta}\partial_r(Fe^{\delta})+\xi R+\lambda r^{-2}|f|^2]\}f=0 \tag{8}$$

sur $\Omega'=\{(\tau,\zeta,\omega),\ -\pi<\tau+\zeta<\pi,\ -\pi<\tau-\zeta<\pi,\ \omega\in S^2\}$. Les coefficients de l'équation (8) admettent un prolongement suffisamment régulier par rapport à (τ,ζ), dans le domaine $\Omega''=\{(\tau,\zeta,\omega),\ -\pi<\tau+\zeta,\ -\pi<\tau-\zeta<\pi,\ \omega\in S^2\}$. En résolvant dans Ω'' le problème de Cauchy associé à (8) pour des données initiales à support compact dans $\{\tau=0\}\times\{-\pi<\zeta<\pi\}\times S^2$, on obtient l'existence d'un profil asymptotique $\hat f_\infty$ quand $r\to\infty$, $t\to\infty$, ce qui exprime la continuité de la solution f de (8) à l'horizon

$\{\tau+\zeta=\pi,\ 0<\tau<\pi\}$:

THÉORÈME 3. — *Étant donné* φ, ψ *dans* $C_0^\infty(]r_0, \infty[\times S_\omega^2)$, *il existe* $\hat{f}_\infty$ *dans* $C^0(\mathbb{R}_s; L^2(S_\omega^2))$ *tel que pour tout réel s, la solution f de* (4), (5) *avec* $m=0$, *vérifie* :

$$(9)\quad \left|\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to+\infty} f(t, r_*=t+s, \omega)=\hat{f}_\infty(s, \omega), \\ \lim\limits_{t\to+\infty} (\partial_t+\partial_{r*}) f(t, r_*=t+s, \omega)=0 \ \textit{dans}\ L^2(S_\omega^2). \end{array}\right.$$

La propriété (9) signifie que, comme dans le cas euclidien, le champ vérifie à l'infini la condition de radiation sortante de Sommerfeld.

Les résultats exposés dans cette Note constituent une première étape pour aborder des problèmes difficiles tels que : comportement à l'horizon de Cauchy, existence des opérateurs d'onde. Ils nécessiteront une analyse très précise du propagateur linéaire qui reste à faire.

Note remise le 8 mars 1993, acceptée le 22 mars 1993.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] T. AUBIN, Espaces de Sobolev sur les variétés riemanniennes, *Bull. Sci. Math.*, 100, 1976, p. 149-173.

[2] A. BACHELOT, Gravitational Scattering of Electromagnetic Field by Schwarzschild Black-Hole, *Ann. Inst. Henri-Poincaré, Physique théorique*, 54, 3, 1991, p. 261-320.

[3] P. BIZON, Colored Black Holes, *Phys. Rev. Lett.*, 64, 1990, p. 2845-2847.

[4] F. CAGNAC et Y. CHOQUET-BRUHAT, Solution globale d'une équation non linéaire sur une variété hyperbolique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 296, série I, 1983, p. 845-849.

[5] Y. CHOQUET-BRUHAT, Solutions globales des équations de Maxwell-Dirac-Klein-Gordon (masses nulles), *C. R. Acad. Sci. Paris*, 292, série I, 1981, p. 153-158.

[6] Y. CHOQUET-BRUHAT et D. CHRISTODOULOU, Existence of global solutions of the Yang-Mills Higgs and spinor field equations in 3+1 dimensions, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 14, 1981, p. 481-506.

[7] Th. DAMOUR, Black-Hole eddy currents, *Phys. Rev. D*, 18, 10, 1978, p. 3598-3604.

[8] J. DIMOCK, Scattering for the wave equation on the Schwarzschild metric, *Gen. Relativ. Gravitation*, 17, n° 4, 1985, p. 353-369.

[9] J. GINIBRE et G. VELO, Time decay of finite energy solutions of the non linear Klein-Gordon and Schrödinger equations, *Ann. Inst. Henri-Poincaré, Physique théorique*, 43, n° 4, 1985, p. 399-442.

[10] W. T. SHU, Spin Field Equations and Yang-Mills Equations, *Ph. D.Thesis*, Princeton University, 1990.

[11] J. A. SMOLLER, A. G. WASSERMAN et S. T. YAU, Existence of black hole solutions for the Einstein-Yang-Mills equations, 1992, preprint.

[12] W. STRAUSS, *Non Linear Wave Equations*, Conference Board on Mathematical Sciences, 73, American Mathematical Society, 1989.

[13] W. von WAHL, The initial-boundary-value problem for semilinear wave equations, *International Workshop on Hyperbolic Problems*, Bonn, 1990.

Département de Mathématiques Appliquées,
Unité Associée au CNRS n° 226, Université Bordeaux-I,
351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.