C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, Série I, p. 795-798, 1993 **795**

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Les pôles de résonance de la métrique de Schwarzschild

Alain BACHELOT et Agnès MOTET-BACHELOT

Résumé — On construit un cadre mathématique rigoureux de la notion de résonances d'un trou noir, introduite par S. Chandrasekhar, en développant la théorie complète de la diffraction pour l'équation de Regge-Wheeler, construction des opérateurs d'onde, complétude asymptotique, prolongement méromorphe de la matrice d'Heisenberg, approximation par troncature de l'interaction et calcul numérique des résonances par l'algorithme de Prony.

Resonances of the Schwarzschild Metric

Abstract — *This Note is devoted to the theoretical and computational investigations of the scattering frequencies of scalar, electromagnetic, gravitational waves around a spherical Black Hole. We adopt a time dependent approach: construction of wave operators for the hyperbolic Regge-Wheeler equation; asymptotic completeness; meromorphic continuation of the Heisenberg matrix; approximation by damping and cut-off of the potentials. We developp a new procedure for the computation of the resonances by the spectral analysis of the transient scattered wave, based on Prony's algorithm.*

L'objet de cette Note est de justifier la notion de *résonances d'un trou noir* introduite par S. Chandrasekhar [3] en développant la théorie complète de la diffraction par la métrique de *Schwarzschild*: existence et complétude asymptotique des opérateurs d'onde, prolongement méromorphe de la matrice de diffraction, calcul numérique de ses pôles. Le détail des démonstrations est à paraître dans [2]. Nous remercions T. Damour et B. Schmidt d'avoir attirer notre attention sur ce problème et le CCVR pour l'attribution de 60 h de calcul sur CRAY2.

I. L'OPÉRATEUR DE DIFFRACTION GRAVITATIONNELLE. — Les perturbations d'un champ sans masse de spin $s \in \mathbb{R}$ en métrique de *Schwarzschild* sont décrites par l'équation de Regge-Wheeler [3] :

$$(1)\quad \partial_t^2 \Psi - (1-r^{-1})\,\partial_r[(1-r^{-1})\,\partial_r \Psi] - (1-r^{-1})[r^{-2}\Delta_{S^2}\Psi - (1-s^2)\,r^{-3}\Psi] = 0, \qquad 1<r.$$

Par décomposition en harmoniques sphériques, le problème se ramène à étudier l'équation :

$$(2)\qquad \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + V(x)\,u = 0, \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$(3)\quad V(x) = (1-r^{-1})[r^{-2}\,l(l+1) + (1-s^2)\,r^{-3}], \quad x = r + \mathrm{Log}\,(r-1), \qquad 1<r, \quad l \in \mathbb{N}.$$

L'existence de l'opérateur de diffraction pour (2) avec des potentiels $V(x) = O(|x|^{-2-\varepsilon})$, $0<\varepsilon$, $|x| \to \infty$ a été établie par R. Phillips [9]. Les potentiels (3) satisfont seulement $V(x) = O(|x|^{-2})$, $x \to +\infty$, aussi étudions-nous (2) sous l'hypothèse :

$$(4)\qquad \left|\begin{array}{l} V(x) = V_+(x) - V_-(x), \qquad 0 \leqq V_\pm, \\ V_+(x) \leqq C(1+|x|)^{-1-\varepsilon}, \qquad V_-(x) \leqq C(1+|x|)^{-2-\varepsilon}, \qquad 0<\varepsilon. \end{array}\right.$$

Pour $f = (f_1, f_2) \in [C_0^\infty(\mathbb{R}_x)]^2$, on introduit les énergies :

$$E_0(f) = \int |f_1'|^2 + |f_2|^2\,dx,$$

$$E(f) = E_0(f) + \int V(x)\,|f_1|^2\,dx, \qquad E_+(f) = E_0(f) + \int [V_+(x) + \mathbf{1}_{[0,1]}(x)]\,|f_1|^2\,dx.$$

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0764-4442/93/03160795 $ 2.00 © Académie des Sciences

On note $\mathscr{H}_0$ et $\mathscr{H}_+$ les complétés de $[C_0^\infty(\mathbb{R}_x)]^2$ pour E_0 et E_+. La solution u de (2) s'exprime à l'aide d'un groupe fortement continu sur $\mathscr{H}_+$:

$$(u(t), \partial_t u(t)) = e^{-itA}(u(0), \partial_t u(0)),$$
$$A = A_0 - i\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le générateur A admet un nombre au plus fini de valeurs propres non nulles dans $\mathscr{H}_+$ et Ker A et Ker A^2 sont des espaces de dimension finie. On note P le projecteur E-orthogonal de $\mathscr{H}_+$ sur $\mathscr{H}$, l'espace E-orthogonal au sous-espace engendré par les fonctions propres de A. Soit Π la surjection canonique de $\mathscr{H}$ sur $\hat{\mathscr{H}} = \mathscr{H}/\mathrm{Ker}\, A$ muni de la norme $\hat{E}(\Pi f) = E(f)$. On introduit l'espace $\hat{\mathscr{H}}_1$, Ê-orthogonal de Ker A^2/Ker A dans $\hat{\mathscr{H}}$. On définit les opérateurs d'onde

$$W_\pm f = s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} \Pi P e^{itA} e^{-itA_0} f \quad \text{dans } \hat{\mathscr{H}}$$

sur le sous-espace $\mathscr{D}_0$ dense dans $\mathscr{H}_0$

$$\mathscr{D}_0 = \left\{ f = (f_1, f_2),\, f_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x),\ \int f_2(x)\,dx = 0 \right\}.$$

Théorème 1. — *Sous l'hypothèse* (4) *les limites* $W_\pm f$ *existent pour tout* $f \in \mathscr{D}_0$ *et vérifient :*

$$W_\pm f \in \hat{\mathscr{H}}_1, \qquad \hat{E}(W_\pm f) = E_0(f), \qquad \overline{\mathrm{Im}\, W_+} = \overline{\mathrm{Im}\, W_-} = \hat{\mathscr{H}}_1.$$

L'opérateur de diffraction $S = W_+^{-1} W_-$ est donc une isométrie de $\mathscr{H}_0$ sur $\mathscr{H}_0$. Ce résultat avait été établi dans [4], [1] pour les cas $s = 0$, 1 où le potentiel (3) est positif. La démonstration utilise une méthode de Kato-Birman tirant partie du caractère « potentiel d'Agmon » de l'interaction.

II. Analyticité de la matrice d'Heisenberg. — S est unitairement équivalent à la matrice d'Heisenberg $\mathscr{S}(\sigma, \omega, \eta)$ définie par :

$$\sigma \in \mathscr{R}^*, \qquad \omega \in \{+1, -1\}, \qquad \mathscr{S}(\sigma, \omega, \omega) = T(\sigma), \qquad \mathscr{S}(\sigma, \omega, -\omega) = R_{-\omega}(\sigma)$$

où les coefficients de transmission T et de réflexion R_ω sont donnés par :

$$T(\sigma)[(f_-(x, \sigma)\partial_x f_+(x, \sigma) - f_+(x, \sigma)\partial_x f_-(x, \sigma)] = 2i\sigma,$$
$$2i\sigma R_\omega(\sigma) = T(\sigma)[(f_+(x, -\omega\sigma)\partial_x f_-(x, \omega\sigma) - f_-(x, \omega\sigma)\partial_x f_+(x, -\omega\sigma)],$$

et les fonctions de Jost $f_\pm$ sont les solutions de :

$$-\partial_x^2 f_\pm + V(x) f_\pm = \sigma^2 f_\pm, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} e^{\mp i\sigma x} f_\pm(x, \sigma) = 1.$$

La représentation spectrale libre est l'isométrie $\mathscr{R}_0$ de $\mathscr{H}_0$ sur $L^2(\mathbb{R}_\sigma \times \{-1, 1\}_\omega)$ definie par :

$$f \in \mathscr{D}_0, \qquad (\mathscr{R}_0 f)(\sigma, \omega) = \sigma^{-1}(2\pi)^{-1/2} E_0(f, (e^{-i\sigma x\omega}, i\sigma e^{-i\sigma x\omega})).$$

L'équivalence des approches temporelle et stationnaire de la diffraction est donnée par le :

Théorème 2. — *Pour tout potentiel* V *satisfaisant* (4) *on a la relation*

$$\mathscr{S} = \mathscr{R}_0 S \mathscr{R}_0^{-1}.$$

Les *résonances* associées au potentiel V sont les pôles du prolongement analytique de $T(\sigma)$ pour Im $\sigma < 0$. L'existence d'un prolongement méromorphe de $\mathscr{S}$ par rapport à σ, est conséquence de l'analyticité de V par rapport à x :

THÉORÈME 3. — *Soit* V *une fonction continue sur* $\mathbb{R}$, *analytique dans* $\{x \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re} x| \geqq \mathrm{B}\}$ *et telle que pour tout* $\theta \in]-(\pi/2), (\pi/2)[$,

$$\int_0^\infty |\mathrm{V}(\pm \mathrm{B} \pm \rho e^{i\theta})| \, d\rho < +\infty, \qquad \sup_{|\alpha| \leqq |\theta|} |\rho \mathrm{V}(\rho e^{i\alpha})| \to 0, \quad |\rho| \to \infty.$$

Alors $\mathrm{T}(\sigma)$ *est méromorphe sur* $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$.

Pour appliquer ce résultat aux potentiels (3) et justifier ainsi la notion de *résonances d'un trou noir* on montre par la formule d'inversion de Lagrange que la fonction $x \to r$, $x = r + \operatorname{Log}(r-1)$, $1 < r$, admet un prolongement holomorphe à $\{x \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re} x| \geqq \mathrm{B}\}$.

PROPOSITION 4. — *Les potentiels de Schwarzschild définis par* (3) *satisfont les hypothèses du théorème* 3.

III. L'APPROXIMATION PAR TRONCATURE. — Si le potentiel est à support compact, il y a une infinité de résonances et les solutions de (2) admettent un développement spectral asymptotique de type Lax-Phillips :

THÉORÈME 5. — *Si* V *est une fonction à support compact*, $\mathrm{V} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, $\mathrm{V} \neq 0$, *alors* $\mathrm{T}(\sigma)$ *est méromorphe sur* $\mathbb{C}$; *chaque bande horizontale ne contient qu'un nombre fini de ses pôles; les pôles de partie imaginaire positive sont purement imaginaires et en nombre fini; l'ensemble des pôles de partie imaginaire strictement négative est infini. On ordonne les pôles de* T *par ordre décroissant de leur partie imaginaire,*

$$\operatorname{Im} \sigma_{j+1} \leqq \operatorname{Im} \sigma_j < 0 \leqq \operatorname{Im} \sigma_0 \leqq \operatorname{Im} \sigma_{-1} \leqq \ldots \leqq \operatorname{Im} \sigma_{-\mathrm{N}}, 1 \leqq j;$$

alors toute solution u de (2) *à données initiales dans* $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ *vérifie :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists c_j(x) \in \mathbb{C}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall n \geqq -\mathrm{N}, \quad \exists c(x, n, \varepsilon) > 0;$$

$$(5) \qquad \left| u(t, x) - \sum_{j=-\mathrm{N}}^{n} e^{-i\sigma_j t} c_j(x) \right| \leqq c(x, n, \varepsilon) \left| e^{(-i\sigma_{n+1} + \varepsilon) t} \right|.$$

Les résonances d'un potentiel analytique sont approchées par les résonances du potentiel amorti et tronqué : étant donné un compact

$$\mathrm{K} \subset \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-, \quad \mathrm{K} \subset \{\sigma \in \mathbb{C}; \ -\pi/2\gamma < \operatorname{Arg} \sigma < \pi + \pi/2\gamma\}, \qquad 1 < \gamma,$$

on note $\mathscr{R}(\mathrm{V}, \mathrm{K})$ l'ensemble des résonances de V dans K.

THÉORÈME 6. — *Soit* V *un potentiel satisfaisant les hypothèses du théorème* 3. *Alors, pour tout* ε, $\eta > 0$, *il existe* $\mathrm{R} > 0$ *tel que :*

$$\forall \rho > \mathrm{R}, \quad \operatorname{Card} \mathscr{R}(\mathrm{V}, \mathrm{K}) = \operatorname{Card} \mathscr{R}(1_{[-\rho, \rho]} . e^{-\varepsilon |x|^\gamma} \mathrm{V}(x), \mathrm{K}),$$

$$\forall \sigma \mathscr{R}(\mathrm{V}, \mathrm{K}), \quad \exists \sigma_{\varepsilon\rho} \in \mathscr{R}(1_{[-\rho, \rho]} . e^{-\varepsilon |x|^\gamma} \mathrm{V}(x), \mathrm{K}), \qquad |\sigma - \sigma_{\varepsilon\rho}| < \eta.$$

Ce résultat et la formule (5) sont à la base d'une méthode, dépendant du temps, de calcul des résonances σ_j d'un trou noir par l'algorithme de *Prony* déjà utilisé en acoustique [7] et en électromagnétisme [8] : on résout par différences finies l'équation (2) pour les potentiels (3); on échantillonne le signal $t \to u(t, x)$ en posant $u_k = u(t_0 + k\Delta\mathrm{T}, x)$ où t_0 est choisi suffisamment grand pour rendre négligeable l'erreur dans (5) :

$$\sum_{j=-\mathrm{N}}^{n} c_j z_j^k = u_k, \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad z_j = e^{-i\sigma_j \Delta\mathrm{T}}.$$

Selon Prony, les z_j inconnues sont les racines du polynôme :

$$\sum_{k=0}^{n+N} \alpha_k z^k = 0,$$

où les coefficients α_k sont les solutions du système linéaire surdéterminé :

$$(6) \qquad \alpha_{n+N} = 1, \quad \sum_{j=0}^{n+N} \alpha_j u_{j+m} = 0, \quad m = 0, \ldots, M, \quad M > N + n.$$

Les résonances dépendant de façon très sensible du potentiel, toutes les procédures de calcul comportent une étape instable : ici c'est la résolution de (6) par décomposition en valeurs singulières où une faible variation des u_k affecte considérablement les α_k. Cette méthode implémentée sur CRAY2 s'avère remarquablement précise dans le calcul des premières résonances; en revanche, son efficacité, à comparer à celle des méthodes stationnaires ([5], [6]), décroît pour des résonances de grande partie imaginaire (évanescence trop rapide du signal).

Note remise le 22 février 1993, acceptée le 2 mars 1993.

Références bibliographiques

[1] A. Bachelot, Gravitational Scattering of Electromagnetic Field by Schwarzschild Black-Hole, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique*, 54, 3, 1991, p. 261-320.

[2] A. Bachelot et A. Motet-Bachelot, Les résonances d'un trou noir de Schwarzschild, *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique théorique* (à paraître).

[3] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black-holes*, Oxford University Press, New York, 1983.

[4] J. Dimock, Scattering for the wave equation on the Schwarzschild metric, *Gen. Rel. Grav.*, 17, 4, 1985, p. 353-369.

[5] J. W. Guinn, Y. Kojima et B. F. Schutz, High-overtone normal modes of Schwarzschild black holes, *Class. Quantum Grav.*, 7, 1990, p. 47-53.

[6] E. Leaver, Spectral decomposition of the perturbation response of the Schwarzschild geometry, *Phys. Rev. D*, 34, 2, 1986, p. 384-408.

[7] G. Majda, W. Strauss et M. Wei, Numerical Computation of the Scattering Frequencies for Acoustic Wave Equations, *Comput. Phys.*, 75, 2, 1988, p. 345-358.

[8] E. K. Miller, R. Mittra, A. J. Poggio et M. I. Van Blaricum, Evaluation of a Processing Technique for Transient Data, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, 36, 1, 1978, p. 165-173.

[9] R. Phillips, Scattering Theory for the Wave Equation with a Short Range Perturbation II, *Indiana Univ. Math. J.*, 33, 6, 1984, p. 831-846.

[10] M. Zworski, Distribution of Poles for Scattering on the Real Line, *J. Funct. Anal.*, 73, 1987, p. 277-296.

Département de Mathématiques Appliquées, CEREMAB,
Unité associée au CNRS n° 226, Université Bordeaux-I,
351, *cours de la Libération*, 33405 *Talence Cedex, France.*