Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Équations intégrales espace-temps pour le système de Maxwell

Alain Bachelot et Agnès Pujols

Résumé – On présente une méthode de calcul d'une onde électromagnétique transitoire diffractée par un obstacle tridimensionnel, basée sur la représentation par potentiels retardés, introduite par Bamberger et Ha Duong en acoustique. Les courants induits au bord sont solutions d'une équation intégrale espace-temps. Sa discrétisation conduit à des schémas numériques stables et convergents, expérimentés en dimension 2 D + 1.

Time dependent integral Equations for the Maxwell system

Abstract – *This Note deals with the calculation of transient electromagnetic field near a perfectly conducting body, based on a boundary integral equation method. Its discrete approximation leads to a stable marching-in-time scheme. Numerical computations in* 2 D+1 *prove the good efficiency of this method.*

Abridged English Version – We present an integral method, introduced by Bamberger and Ha Duong in acoustics, for the computation of electromagnetic scattered field, based on the representation by retarded potentials on boundary Γ. This method requires the discretization of an exotic pseudodifferential operator R, of Neumann-type, on $\mathbb{R}_t \times \Gamma$.

In the exterior domain, Ω_+, of the obstacle Ω_-, with boundary Γ, outgoing unit normal $\mathbf{n}$, the scattered field satisfies the Maxwell equations (P_+) and the solution (E, H) of (P_+) can be extended in Ω_- so that the interior problem (P_-) is also satisfied:

$$(P_\pm)\qquad \begin{cases} -\partial_t \mathrm{E} + \operatorname{curl} \mathrm{H} = 0, \quad \partial_t \mathrm{H} + \operatorname{curl} \mathrm{E} = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}_t \times \Omega_+ \\ \operatorname{div} \mathrm{E} = \operatorname{div} \mathrm{H} = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}_t \times \Omega_\pm \\ \mathbf{n} \wedge \mathrm{E} = -\mathbf{n} \wedge \mathrm{E}^i = c, \quad \text{on } \mathbb{R}_t \times \Gamma, \quad c = 0, \quad t \leqq 0. \end{cases}$$

The solution (E, H) of (P_+) and (P_-) can be written in terms of *retarded potentials:*

$$\mathrm{E}(t, x) = -\int_\Gamma (4\pi |x-y|)^{-1} \partial_t j(\tau, y)\, d\gamma(y) + \operatorname{grad} \int_\Gamma \int_0^\tau (4\pi |x-y|)^{-1} \operatorname{div}_\Gamma j(s, y)\, ds\, d\gamma(y).$$

The surface current j is the jump of $-\mathbf{n} \wedge \mathrm{H}$ through Γ, $\tau = t - |x-y|$, and the boundary condition becomes:

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathrm{R} j \equiv -\mathbf{n} \wedge (\mathbf{n} \wedge \partial_t \mathrm{S} j) - \operatorname{grad}_\Gamma \mathrm{S} \operatorname{div}_\Gamma \left(\displaystyle\int_0^t j(\tau)\, d\tau \right) = \mathbf{n} \wedge c, \\ \mathrm{S} f(t, x) = \left\{ \displaystyle\int_\Gamma (4\pi |x-y|)^{-1} f(t - |x-y|, y)\, d\gamma(y) \right\}, \qquad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \Gamma. \end{cases}$$

By multiplying (1) by a vector test function φ on $\mathbb{R}_t^+ \times \Gamma$ we obtain the variational formulation

$$(2)\qquad \int_0^{+\infty} \langle \varphi(t, .), \mathrm{R} j(t, .) \rangle_\Gamma\, dt = \int_0^{+\infty} \langle \varphi(t, .), \mathbf{n} \wedge c(t, .) \rangle_\Gamma\, dt.$$

Note présentée par Jacques-Louis Lions.

0764-4442/92/03140639 $ 2.00

We show that this bilinear form is continuous and coercive on suitable Hilbert spaces introduced by Bamberger and Ha Duong ([1], [5]); we did not obtain the best time regularity results because R is an exotic pseudodifferential operator in $OPS^1_{1/3,\,2/3}$. However its discrete approximation leads to a stable and convergent marching-in-time scheme.

To calculate current j, induced on Γ, we give an approximation of variational problem (2) using a finite elements method in both time and space. The approximated current is written as:

$$j_{h\,\Delta t}(t,\,x)=\sum_{j=1}^{N_h}\alpha_{j,\,\Delta t}(t)\,\varphi_j^h(x) \tag{3}$$

where $\alpha'_{j,\,\Delta t}$ is a constant in $I_n=[n\Delta t,\,(n+1)\Delta t[$, denoted by a_j^n. If we choose the test functions as

$$\varphi_{j\,\Delta t}(t)=t-t_{n-1}\quad \text{for } t\in I_{n-1},\qquad t_{n+1}-t\quad \text{for } t\in I_n,\qquad 0 \text{ elsewhere}$$

a simple substitution into (2) yields to a matrix form as:

$$M_0\,A^n=-\sum_{k=0}^{n-1}M_{n-k}\,A^k+B^n,\quad 1\leqq n,\qquad A^k=(a_1^k,\,\ldots,\,a_{N_h}^k)^T. \tag{4}$$

If Δt is small enough, M_0 is positive definite and given $(B^n)_n$ computed from (2), this infinite system has a unique solution $(A^n)_n$ and this scheme is convergent to solution j of (1).

Unfortunately this scheme is not marching in time because A^0 is not determined. Then, taking account the fact that M_1 is bigger than M_0 we make a *lumping* by putting:

$$\bar{M}_1=M_1+e^{2\sigma\,\Delta t}\,M_0,\qquad \bar{M}_k=M_k,\quad 2\leqq k,\qquad B^n=\bar{B}^n,\quad 1\leqq n,\qquad 0<\sigma,$$

and we solve the quasi-explicit marching-in-time scheme

$$\bar{M}_1\,A^0=\bar{B}^1,\qquad \bar{M}_1\,A^n=-\sum_{k=0}^{n-1}\bar{M}_{n+1-k}\,A^k+\bar{B}^{n+1},\quad 1\leqq n. \tag{5}$$

This scheme comes from a coercive discrete variational problem and is stable.

We have applied this method in the case of an infinite conducting cylinder Ω_-. The computation of the scattering amplitude gives excellent results; moreover the computation of a short impulse shows the long time stability of this scheme.

---

1. Diffraction par un obstacle conducteur. — On étudie la diffraction d'une onde incidente électromagnétique $(E^i,\,H^i)$ par un ouvert borné Ω_- de $\mathbb{R}^3$, de frontière régulière Γ, de normale sortante $\mathbf{n}$. A l'extérieur de l'obstacle, Ω_+, le champ diffracté satisfait les équations de Maxwell (P_+) dont la solution se prolonge dans Ω_- en une solution du problème intérieur (P_-) :

$$(P_\pm)\qquad \begin{cases} -\partial_t E+\operatorname{rot} H=0,\qquad \partial_t H+\operatorname{rot} E=0,\quad \text{dans } \mathbb{R}_t\times\Omega_\pm,\\ \operatorname{div} E=\operatorname{div} H=0,\quad \text{dans } \mathbb{R}_t\times\Omega_\pm,\\ \mathbf{n}\wedge E=-\mathbf{n}\wedge E^i=c\quad \text{sur } \mathbb{R}_t\times\Gamma,\qquad c=0,\quad t\leqq 0.\end{cases}$$

La solution (E, H) de (P_+) et (P_-) peut s'écrire comme une somme de *potentiels retardés :*

$$(1)\quad E(t, x) = -\int_\Gamma (4\pi|x-y|)^{-1}\,\partial_t j(\tau, y)\,d\gamma(y) + \operatorname{grad}\int_\Gamma\int_0^\tau (4\pi|x-y|)^{-1}\operatorname{div}_\Gamma j(s, y)\,ds\,d\gamma(y),$$

$$(2)\qquad H(t, x) = \operatorname{rot}\int_\Gamma (4\pi|x-y|)^{-1} j(\tau, y)\,d\gamma(y),\qquad t\in\mathbb{R}^+\quad\text{et}\quad x\notin\Gamma,$$

où le *temps retardé* τ est égal à $t-|x-y|$. Les courants et charges de surface j et q sont les sauts de $-\mathbf{n}\wedge H$ et $-\mathbf{n}.E$ à travers Γ, respectivement, liés par l'équation de conservation de la charge :

$$(3)\qquad \partial_t q + \operatorname{div}_\Gamma j = 0.$$

Les relations (1) et (3) conduisent à une équation intégrale (4) reliant j et c sur $\mathbb{R}_t\times\Gamma_x$:

$$(4)\qquad Rj = \mathbf{n}\wedge c,$$

$$(5)\qquad Rj = -\mathbf{n}\wedge(\mathbf{n}\wedge\partial_t Sj) - \operatorname{grad}_\Gamma S\operatorname{div}_\Gamma\left[\int_0^t j(\tau)\,d\tau\right],$$

$$(6)\qquad Sf(t, x) = \left\{\int_\Gamma (4\pi|x-y|)^{-1} f(t-|x-y|, y)\,d\gamma(y)\right\},\qquad t\in\mathbb{R}^+,\quad x\in\Gamma.$$

Cette relation fait apparaître un opérateur pseudodifférentiel sur $\mathbb{R}_t\times\Gamma$ similaire à l'opérateur de Neumann pour l'équation des ondes que l'on sait appartenir à la classe exotique $OPS^1_{1/3,\,2/3}$ qui n'opère pas sur les espaces de Sobolev [10]. Suivant A. Bamberger et T. Ha Duong ([1], [5]), nous étudions le problème harmonique associé pour en déduire les propriétés de R par la transformation de Fourier-Laplace. On introduit les espaces de trace classiques (*cf.* [3], [4]) :

$$H^s(\operatorname{div}, \Gamma) = \{c\in H^s(\Gamma)^3,\ c.\mathbf{n}=0,\ \operatorname{div}_\Gamma c\in H^s(\Gamma)\},$$
$$H^s(\operatorname{rot}, \Gamma) = \{c\in H^s(\Gamma)^3,\ c.\mathbf{n}=0,\ \operatorname{rot}_\Gamma c\in H^s(\Gamma)\}.$$

$H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma)$ et $H^{-1/2}(\operatorname{rot}, \Gamma)$ sont duals l'un de l'autre; on notera $\langle\ ,\ \rangle$ le crochet de dualité associé. Étant donnés des réels r, s et σ, $\sigma>0$, $\mathscr{H}^s_\sigma(\mathbb{R}^+, H^r(\operatorname{div}, \Gamma))$ désigne l'ensemble des distributions f sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $H^r(\operatorname{div}, \Gamma)$, de support dans $\mathbb{R}^+$, vérifiant :

$$|f|_{\sigma, s, r\,\operatorname{div}} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\sigma t}\|\Lambda^s f\|^2_{H^r(\operatorname{div},\Gamma)}\,dt\right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} |\omega|^{2s}\|\hat f(\omega)\|^2_{H^r(\operatorname{div},\Gamma)}\,d\omega\right)^{1/2} < \infty,$$

où $\hat f(\omega)$ est la transformée de Fourier-Laplace de f. $\mathscr{H}^s_\sigma(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\operatorname{rot}, \Gamma))$ est défini de façon analogue. La transformation de Fourier-Laplace en temps ramène l'étude du problème $(P_\pm)$ et de l'équation intégrale (4) à l'analyse d'un problème variationnel classique; l'estimation précise des constantes de continuité et de coercivité en fonction de la fréquence ω permet, par transformation inverse, de résoudre les problèmes temporels dans les espaces $\mathscr{H}^s_\sigma$.

THÉORÈME 1. — *Pour tout c dans* $\mathscr{H}^1_\sigma(\mathbb{R}^+, H^{-1/2}(\operatorname{div}, \Gamma))$ *le problème* $(P_\pm)$ *admet une unique solution* (E, H) *satisfaisant l'inégalité d'énergie :*

$$(7)\qquad \int_0^{+\infty} e^{-2\sigma t}\int_{\Omega_+\cup\Omega_-} (|E(t, x)|^2 + |H(t, x)|^2)\,dx\,dt \leqq C_\sigma |c|^2_{\sigma, 1, -1/2\,\operatorname{div}}.$$

L'opérateur pseudodifférentiel R *est continu de* $\mathscr{H}^2_\sigma(\mathbf{R}^+, \mathrm{H}^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma))$ *dans* $\mathscr{H}^0_\sigma(\mathbf{R}^+, \mathrm{H}^{-1/2}(\mathrm{rot}, \Gamma))$ *et satisfait la propriété de coercivité :*

$$(8)\quad \forall p \in \mathscr{H}^2_\sigma(\mathbf{R}^+, \mathrm{H}^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma)), \quad \int_0^{+\infty} e^{-2\sigma t} \langle p(t, .), \mathrm{R}p(t, .)\rangle\, dt \geqq \mathrm{C}_\sigma |p|^2_{\sigma, -1, -1/2\,\mathrm{div}}.$$

Pour tout c dans $\mathscr{H}^2_\sigma(\mathbb{R}^+, \mathrm{H}^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma))$ *l'équation intégrale* (4) *admet une unique solution j dans* $\mathscr{H}^0_\sigma(\mathbb{R}^+, \mathrm{H}^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma))$. *Plus précisément, si c appartient à*

$$\mathscr{H}^{s+1}_\sigma(\mathbb{R}^+, \mathrm{H}^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma)), \qquad 1 \leqq s,$$

alors j appartient à $\mathscr{H}^{s-1}_\sigma(\mathbb{R}^+, \mathrm{H}^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma))$ *et satisfait :*

$$(9)\quad |j|_{\sigma, s-1, -1/2\,\mathrm{div}} \leqq \mathrm{C}_\sigma |c|_{\sigma, s+1, -1/2\,\mathrm{div}}.$$

Ces estimations ne sont certainement pas optimales : on perd de la régularité en temps. Notons que les espaces de coercivité et de continuité pour R étant différents, les relations (8) et (9) ne permettent pas d'obtenir directement l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale (4) en considérant la formulation variationnelle naturellement associée :

$$(10)\quad \int_0^{+\infty} e^{-2\sigma t} \langle p(t, .), \mathrm{R}j(t, .)\rangle\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-2\sigma t} \langle p(t, .), \mathbf{n} \wedge c(t, .)\rangle\, dt.$$

La relation de coercivité (8) de cette forme bilinéaire est reliée à l'énergie électromagnétique :

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\sigma t} \langle j(t, .), \mathrm{R}j(t, .)\rangle\, dt = \sigma \int_0^{+\infty} e^{-2\sigma t} (\| \mathrm{E}(t) \|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_+ \cup \Omega_-)} + \| \mathrm{H}(t) \|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega_+ \cup \Omega_-)})\, dt,$$

et entraînera la stabilité inconditionnelle des schémas construits par discrétisation de (10).

2. L'APPROXIMATION DU PROBLÈME VARIATIONNEL. — Pour calculer le courant j, induit sur Γ, on définit une approximation du problème variationnel (10) par une méthode d'éléments finis en espace et en temps. On discrétise en espace suivant [2] et [7]. En notant φ^h_j les fonctions de base d'un sous-espace de dimension finie, V_h, de $\mathrm{H}^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma)$ et en choisissant une subdivision régulière de l'axe des temps positif $\{ t_n = n\,\Delta t,\ n \in \mathbb{N} \}$, le courant approché est donné par :

$$(11)\quad j_{h\,\Delta t}(t, x) = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}_h} \alpha_{j\,\Delta t}(t)\, \varphi^h_j(x)$$

où $\alpha_{j\,\Delta t} \in \mathscr{H}^m(\Delta t, \mathbb{R})$, espace des fonctions polynomiales de degré m sur les intervalles $\mathrm{I}_n = (t_n, t_{n+1})$. En remplaçant j par $j_{h\,\Delta t}$ dans (10), on obtient le problème variationnel discret :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{\mathrm{N}_h} \int_0^{+\infty} e^{-2\sigma t} \beta_{j\,\Delta t}(t) \iint_{\Gamma \times \Gamma} \mathrm{K}^{(1)}_{jl}(x, y)\, \alpha'_{l\,\Delta t}(t - |x-y|) \\
&\qquad + \mathrm{K}^{(2)}_{jl}(x, y) \left\{ \int_0^{t-|x-y|} \alpha_{l\,\Delta t}(\tau)\, d\tau \right\} d\gamma(x)\, d\gamma(y)\, dt \\
&\qquad\qquad = - \int_0^{+\infty} e^{-2\sigma t} \beta_{j\,\Delta t}(t) \int_\Gamma \varphi^h_j(x)\,(c_h(t, x) \wedge \mathbf{n}_x)\, d\gamma(x)\, dt, \\
&\qquad \forall j \leqq \mathrm{N}_h, \qquad \forall \beta_{j\,\Delta t} \in \mathscr{H}^m(\Delta t, \mathbb{R}), \\
&\qquad \mathrm{K}^{(1)}_{jl}(x, y) = (4\pi |x-y|)^{-1} \varphi^h_j(x) . \varphi^h_l(y), \\
&\qquad \mathrm{K}^{(2)}_{jl}(x, y) = (4\pi |x-y|)^{-1} \mathrm{div}_\Gamma \varphi^h_j(x)\, \mathrm{div}_\Gamma \varphi^h_l(y).
\end{aligned}\right.$$

La dérivée d'ordre m de $\alpha_{l\,\Delta t}$ est constante sur I_n, notée a_l^n; (12) s'écrit sous forme matricielle :

$$(13) \qquad m \leqq n, \quad M_0 A^n = -\sum_{k=0}^{n-1} M_{n-k} A^k + B^n,$$

où A^k est le vecteur des inconnues $(a_1^k, \ldots, a_{N_h}^k)^T$ et B^n est le vecteur correspondant au membre de droite de (12). Ce système infini a une unique solution $(A^n)_n$ et le schéma est convergent :

Théorème 2. — *Si la solution j de* (4) *satisfait*

$$j \in \mathscr{H}_\sigma^2(\mathbb{R}^+; H^{m_1}(\mathrm{div}, \Gamma)) \cap \mathscr{H}_\sigma^{m_2+1}(\mathbb{R}^+; H^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma)), \qquad m_1 > 1, \quad m_2 > 2,$$

alors pour tout $\varepsilon \in]0, 1/2]$, *la solution* $j_{h,\,\Delta t}$ *définie par* (11) *converge vers* j :

$$|j - j_{h,\,\Delta t}|_{\sigma,-1,-1/2\,\mathrm{div}} \leqq C_\varepsilon \{ |c - c_{h,\,\Delta t}|_{\sigma,\,1,-1/2\,\mathrm{div}} + h^{m_1-\varepsilon} \Delta t^{-1} |j|_{\sigma,\,2,\,m_1\,\mathrm{div}} + \Delta t^{m_2-2} |j|_{\sigma,\,m_2+1,-1/2\,\mathrm{div}} \}.$$

Pour Δt suffisamment petit, M_0 est définie positive. Malheureusement le schéma (13) n'est pas constructif car $A^0, \ldots, A^{m-1}$ ne sont pas déterminés. Pour $m=1$, nous proposons une méthode de *condensation de masse* tirant partie du fait que M_1 est prédominante par rapport à M_0. On pose :

$$\bar{M}_1 = M_1 + e^{2\sigma\Delta t} M_0, \qquad \bar{M}_k = M_k, \quad 2 \leqq k, \qquad B^n = \bar{B}^n, \quad 1 \leqq n,$$

et on résout successivement les systèmes linéaires

$$(14) \qquad \bar{M}_1 \bar{A}^0 = \bar{B}^1, \qquad \bar{M}_1 \bar{A}^n = -\sum_{k=0}^{n-1} \bar{M}_{n+1-k} \bar{A}^k + \bar{B}^{n+1}, \quad 1 \leqq n.$$

Si le coefficient de Courant Friedrichs Lewy est petit, $\bar{M}_1$ est très creuse et aisément inversible par une méthode de Cholesky profil. De plus, en posant

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \bar{A}^k = (a_1^k, \ldots, a_{N_h}^k)^T, & j_{h\,\Delta t}(t, x) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_{j\,\Delta t}(t)\, \varphi_j^h(x), \\ \alpha_{j\,\Delta t} \in \mathscr{H}_\sigma^1(\Delta t, \mathbb{R}), & \alpha'_{l\,\Delta t} = a_l^n \quad \text{sur } I_n, \end{array} \right.$$

$j_{h\,\Delta t}$ est la solution d'un problème variationnel discret, perturbation coercive du problème (12), et ce schéma est inconditionnellement stable :

Théorème 3. — *Si $c_{h,\,\Delta t}$ est une approximation consistante de c dans* $\mathscr{H}_\sigma^1(\mathbb{R}^+; H^{-1/2}(\mathrm{div}, \Gamma))$, *alors $j_{h,\,\Delta t}$ donné par* (14)-(15) *satisfait* :

$$|j_{h,\,\Delta t}|_{\sigma,-1,-1/2\,\mathrm{div}} \leqq \mathrm{Cte}, \qquad h \to 0, \quad \Delta t \to 0.$$

3. Expérimentation numérique. — Nous avons considéré le cas d'un obstacle cylindrique infini conducteur : le champ électrique diffracté $E=(0, 0, E_Z)$ est solution de l'équation des ondes en dimension deux. On construit une formulation variationnelle espace-temps calculant le courant $p = -\partial_n E_Z - \partial_n E_Z^i$. Sa discrétisation conduit à un schéma du type (13). Nous en éprouvons la validité en comparant le calcul de l'amplitude de diffraction avec les résultats d'un code d'équations intégrales en domaine harmonique à l'aide de deux méthodes :

(1) Étant donnée une onde incidente $E_Z^i = \exp[i\omega(t - x.\theta)]$, le principe d'amplitude limite assure que $\exp(-i\omega t) E_Z(t, .)$ tend vers la solution du problème harmonique

lorsque t tend vers l'infini; on évalue alors l'amplitude diffraction par :

$$(16) \qquad a(\omega, \theta, \theta') \approx C \int_\Gamma e^{i\omega(x.\theta'-t)} [\partial_n E_Z(t, x) + i\omega(n_x.\theta') E_Z(t, x)] \, d\gamma(x), \qquad 1 \ll t.$$

(2) Une onde incidente singulière $E_Z^i = \delta(x.\theta - t)$ est approchée par régularisation par une impulsion brève $E_Z^i(t, x) = \varphi_j(x.\theta - t)$. La formule de représentation de A. Majda ([6], [9]) donne :

$$(17) \qquad a(\omega, \theta, \theta') \approx C \int_{\mathbb{R}_t} \int_\Gamma e^{i\omega(x.\theta'-t)} [\partial_n E_Z(t, x) + i\omega(n_x.\theta') E_Z(t, x)] \, d\gamma(x) \, dt.$$

L'expérimentation numérique menée pour des géométries simples donne des résultats très satisfaisants et cette méthode s'avère très stable pour le calcul d'impulsions brèves.

Note remise le 14 janvier 1992, acceptée le 29 janvier 1992.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. BAMBERGER et T. HA DUONG, Formulation variationnelle espace-temps pour le calcul par potentiel retardé d'une onde acoustique, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 8, 1986, p. 405-435 et p. 598-608.

[2] A. BENDALI, Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques, *Thèse d'État*, Université Paris-VI, 1984.

[3] M. CESSENAT, Rapport Interne, C.E.A./C.E.L.V., 1984.

[4] R. DAUTRAY et J.-L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, 1 et 5, Masson, 1985.

[5] T. HA DUONG, Équations intégrales pour la résolution numérique des problèmes de diffraction d'ondes acoustiques dans $\mathbb{R}^3$, *Thèse d'État*, Université Paris-VI, 1987.

[6] A. MAJDA, A representation formula for the scattering operator and the inverse scattering problem for arbitrary bodies, *Comm. Pure Appl. Math.*, 30, 1977, p. 165-194.

[7] J.-C. NEDELEC, Curved finite element methods for the solution of singular integral equations on surface in $\mathbb{R}^3$, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 8, 1976, p. 61-80.

[8] A. PUJOLS, Équations intégrales espace-temps pour le système de Maxwell. Application au calcul de la surface équivalente Radar, *Thèse de Doctorat*, Université Bordeaux-I, 1991.

[9] H. SOGA, Singularities of the scattering kernel for convex obstacles, *J. Math. Kyoto Univ.*, 22, 1983, p. 729-765.

[10] M. TAYLOR, *Pseudodifferential Operators*, Princeton University Press, 1981.

A. B. : *Université Bordeaux-I, Département de Mathématiques appliquées*, 33405 *Talence Cedex;*

A. P. : *C.E.A./C.E.S.T.A., Service Informatique*, 33114 *Le Barp.*