C. R. Acad. Sci. Paris, t. 312, Série I, p. 93-96, 1991

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Opérateur de diffraction pour le système de Maxwell en métrique de Schwarzschild

Alain BACHELOT

Résumé – On établit l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'onde décrivant la diffraction du champ électromagnétique par un trou noir de Schwarzschild. A l'infini le champ est asymptotiquement libre; à l'horizon du trou noir le champ se comporte comme une onde plane polarisée. On justifie le *paradigme de la membrane* comparant un trou noir à une sphère dissipative avec la condition d'impédance classique.

Scattering operator for Maxwell system on Schwarzschild metric

Abstract – *We prove the existence and asymptotic completeness of wave operators describing the scattering of electromagnetic field by a Schwarzschild Black Hole. At infinity the field is asymptotically free; near the horizon of Black Hole the field behaves like an incoming plane wave (Damour-Znajeck property). We justify the* Membrane Paradigm *by comparing the Black Hole with a dissipative sphere with the classical impedence condition.*

I. ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS L'ESPACE-TEMPS DE SCHWARZSCHILD. – On étudie le champ électromagnétique hors d'un trou noir sphérique de rayon $r_0>0$, décrit par la métrique de Schwarzschild

(1) $$ds^2=\alpha^2\,dt^2-\alpha^{-2}\,dr^2-r^2\,(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2),\qquad \alpha=(1-r_0\,r^{-1})^{1/2},\quad r_0<r.$$

Cette métrique présente une singularité fictive à « l'horizon » $\Gamma=\mathbb{R}_t\times\{r=r_0\}\times S^2$ et aucune géodésique nulle n'atteint Γ en un temps fini t. Dans le vide de Schwarzschild le tenseur de Maxwell $\mathbf{F}$ vérifie les équations :

(2) $$\mathbf{dF}=0,\qquad \mathbf{d}*\mathbf{F}=0,$$

où $*$ est l'opérateur de Hodge associé à la métrique (1). On décompose $\mathbf{F}$ en champs électrique et magnétique relativement au champ de vecteurs $\mathbf{u}=\alpha^{-1}\,\partial_t$

$$E_\mu=F_{\mu,\nu}\,u^\nu,\qquad B_\mu=-(*\,F)_{\mu,\nu}\,u^\nu.$$

En posant

$$^tU=(E^{\hat r},E^{\hat\theta},E^{\hat\varphi},B^{\hat r},B^{\hat\theta},B^{\hat\varphi})=(E,B),$$
$$X=X^{\hat r}\,\alpha\,\partial_r+X^{\hat\theta}\,r^{-1}\,\partial_\theta+X^{\hat\varphi}\,(r\sin\theta)^{-1}\,\partial_\varphi,\qquad X=E,\ B,$$

les équations de Maxwell (2) prennent la forme familière

(3) $$\partial_t U=-i\,HU,\qquad \nabla_{\mathscr{S}}\,.\,E=\nabla_{\mathscr{S}}\,.\,B=0,$$

avec

$$H=i\begin{pmatrix}0 & \nabla_{\mathscr{S}}\times\alpha\\ -\nabla_{\mathscr{S}}\times\alpha & 0\end{pmatrix},\qquad \nabla_{\mathscr{S}}\times\alpha=\begin{pmatrix}0 & -\dfrac{\alpha}{r\sin\theta}\partial_\varphi & \dfrac{\alpha}{r\sin\theta}\partial_\theta\sin\theta\\ \dfrac{\alpha}{r\sin\theta}\partial_\varphi & 0 & -\dfrac{\alpha}{r}\partial_r\,r\,\alpha\\ -\dfrac{\alpha}{r}\partial_\theta & \dfrac{\alpha}{r}\partial_r\,r\,\alpha & 0\end{pmatrix}$$

$$\nabla_{\mathscr{S}}\,.\,X=\alpha\,r^{-2}\,\partial_r(r^2\,X^{\hat r})+(r\sin\theta)^{-1}\,[\partial_\theta(\sin\theta\,X^{\hat\theta})+\partial_\varphi X^{\hat\varphi}].$$

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

0764-4442/91/03120093 $ 2.00

S'il n'y a pas de trou noir, $\alpha=1$ et on retrouve la dynamique libre exprimée en coordonnées sphériques dans l'espace-temps de Minkowski. On introduit l'espace de Hilbert d'énergie « décalée vers le rouge » finie et le sous-espace des champs de divergence nulle :

$$\mathscr{H}=[L^2(]r_0, +\infty[_r \times S^2_\omega, r^2\,dr\,d\omega)]^6, \qquad \mathscr{H}^{(0)}=\{U\in\mathscr{H}, \nabla_{\mathscr{S}}.E=\nabla_{\mathscr{S}}.B=0\}.$$

Comme dans le cas d'un obstacle dans l'espace euclidien le second espace de cohomologie est non trivial :

$$\mathbb{H}^2=\{U\in\mathscr{H}^{(0)}, HU=0\}=\{U={}^t(ar^{-2}, 0, 0, br^{-2}, 0, 0), a, b\in\mathbb{C}\}.$$

La théorie de la diffraction conduit naturellement à introduire l'orthogonal $\mathcal{H}$ de $\mathbb{H}^2$ dans $\mathscr{H}^{(0)}$:

$$\mathscr{H}^{(0)}=\mathcal{H}\oplus\mathbb{H}^2, \qquad \mathcal{H}=\left\{U\in\mathscr{H}^{(0)}, \int E^{\hat{r}}\,dr\,d\omega=\int B^{\hat{r}}\,dr\,d\omega=0\right\}.$$

On considère l'opérateur H comme un opérateur différentiel défini au sens des distributions.

THÉORÈME 1. — *Pour* $\mathscr{E}=\mathscr{H}$, $\mathscr{H}^{(0)}$ *ou* $\mathcal{H}$, H *est autoadjoint sur* $\mathscr{E}$, *de domaine dense* $D(H|_{\mathscr{E}})=\{U\in\mathscr{E}, HU\in\mathscr{E}\}$.

Le problème de Cauchy associé à (3) est ainsi résolu par le théorème de Stone.

La métrique de Schwarzschild admet des géodésiques fermées : tous les grands cercles de la sphère de rayon $3r_0/2$ appelée sphère des photons. Il existe aussi des géodésiques nulles asymptotes à cette sphère. Les singularités des champs peuvent ainsi rester piégées; néanmoins il n'existe pas de solution périodique :

THÉORÈME 2. — *Le spectre ponctuel de* H *sur* $\mathcal{H}$ *est vide.*

On en déduit la décroissance de l'énergie locale et l'existence des opérateurs d'onde. L'étude du cas scalaire a été menée par Dimock [3].

II. OPÉRATEURS D'ONDE À L'INFINI. — L'univers de Schwarzschild est asymptotiquement plat et loin du trou noir on compare l'hamiltonien H avec l'hamiltonien de l'électromagnétisme classique H_0 :

$$H_0=i\begin{pmatrix}0 & \mathrm{rot}\\ -\mathrm{rot} & 0\end{pmatrix},$$

dans l'espace de Minkowski muni de la métrique

$$ds^2=dt^2-d\rho^2-\rho^2(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2), \qquad 0\leq\rho.$$

On évite les interactions de longue portée entre les champs gravitationel et électromagnétique en identifiant ρ et la coordonnée de Wheeler r_* qui redresse les géodésiques radiales nulles :

$$\rho=r_*=r+r_0\ln(r-r_0). \tag{4}$$

Plus précisément, $H-H_0$ contient encore une perturbation de longue portée, mais par ce choix, celle-ci affecte seulement les composantes *radiales* qui décroissent plus vite que le champ total; cette conséquence fondamentale de l'invariance par rotation du système de Maxwell, compense l'effet longue portée et permet de construire les opérateurs d'ondes classiques sans les modifications nécessaires dans le cas scalaire. On introduit les espaces usuels d'énergie finie :

$$\mathscr{H}_0=\{U_0={}^t(E_0^{\hat{r}}, E_0^{\hat{\theta}}, E_0^{\hat{\varphi}}, B_0^{\hat{r}}, B_0^{\hat{\theta}}, B_0^{\hat{\varphi}})\in[L^2(\mathbb{R}^+_{r_*}\times S^2_\omega, r_*^2\,dr_*\,d\omega)]^6\},$$
$$\mathcal{H}_0=\{U_0\in\mathscr{H}_0;\ \mathrm{div}\,E_0=\mathrm{div}\,B_0=0\}.$$

Étant donnée une fonction de troncature $\chi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^+_{r_*})$ satisfaisant $\chi_0(r_*)=0$ pour $0 \leqq r_* < a$, et $\chi_0(r_*)=1$ pour $r_* > b$, avec $0<a<b$, on construit un opérateur d'identification $\mathscr{I}_0 : \mathscr{H}_0 \to \mathscr{H}$ en posant :

$$\mathscr{I}_0 U_0 = \chi_0 U_0 \quad \text{pour } r_* \geqq 0, \qquad \mathscr{I}_0 U_0 = 0 \quad \text{pour } r_* \leqq 0.$$

On définit les opérateurs d'onde classiques :

$$W_0^\pm U_0 = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} \mathscr{I}_0 e^{-itH_0} U_0 \quad \text{dans } \mathscr{H},$$

$$W_0 U = \lim_{t \to +\infty} e^{itH_0} \mathscr{I}_0^* e^{-itH} U \quad \text{dans } \mathscr{H}_0.$$

THÉORÈME 3. — *Les opérateurs* $W_0^\pm$ *sont définis de* $\mathscr{H}_0$ *dans* $\mathscr{H}$. *Ils sont indépendants de* χ_0 *et* $\| W_0^\pm \| \leqq 1$.

THÉORÈME 4. — *L'opérateur* W_0 *est défini de* $\mathscr{H}$ *dans* $\mathscr{H}_0$. *Il est indépendant de* χ_0 *et* $\| W_0 \| \leqq 1$.

III. OPÉRATEURS D'ONDE À L'HORIZON DU TROU NOIR. — H dégénère quand $r \to r_0$, mais $r\alpha H (r\alpha)^{-1}$ admet une limite formelle H_1

$$H_1 = i\begin{pmatrix} 0 & h_1 \\ -h_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{r_*} \\ 0 & \partial_{r_*} & 0 \end{pmatrix}.$$

H_1 est essentiellement l'hamiltonien de Maxwell dans la métrique de Rindler qui approche la métrique de Schwarzschild près de l'horizon. On introduit les espaces de Hilbert :

$$\mathscr{H}_1 = \{ U_1 = {}^t(E_1^{\hat r}, E_1^{\hat\theta}, E_1^{\hat\varphi}, B_1^{\hat r}, B_1^{\hat\theta}, B_1^{\hat\varphi}) \in [L^2(\mathbb{R}_{r_*} \times S^2_\omega, dr_*\, d\omega)]^6 \},$$

$$\mathscr{H}_1^\pm = \{ U_1 \in \mathscr{H}_1 ;\ E_1^{\hat r} = B_1^{\hat r} = \pm E_1^{\hat\theta} + B_1^{\hat\varphi} = \pm E_1^{\hat\varphi} - B_1^{\hat\theta} = 0 \}.$$

Les champs de $\mathscr{H}_1^{+(-)}$ ont une polarisation gauche (droite) et se comportent comme des ondes planes tombant à travers l'horizon futur (émergeant de l'horizon passé) du trou noir :

$$U_1 \in \mathscr{H}_1^\pm \quad \Rightarrow \quad [e^{-itH_1} U_1](r_*, \omega) = U_1(\pm t + r_*, \omega).$$

Étant donnée une fonction de troncature $\chi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_{r_*})$ satisfaisant $\chi_1(r_*)=1$ pour $r_* < c$, $\chi_1(r_*)=0$ pour $r_* > d$, avec $c<d$, on construit un opérateur d'identification $\mathscr{I}_1 : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}$ en posant

$$\mathscr{I}_1 U_1 = (r\alpha)^{-1} \chi_1 U_1,$$

et on définit les opérateurs d'onde classiques :

$$W_1^\pm U_1 = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} \mathscr{I}_1 e^{-itH_1} U_1 \quad \text{dans } \mathscr{H},$$

$$W_1 U = \lim_{t \to +\infty} e^{itH_1} \mathscr{I}_1^* e^{-itH} U \quad \text{dans } \mathscr{H}_1.$$

THÉORÈME 5. — *Les opérateurs* $W_1^\pm$ *sont définis de* $\mathscr{H}_1^\pm$ *dans* $\mathscr{H}$. *Ils sont indépendants de* χ_1 *et* $\| W_1^\pm \| \leqq 1$.

THÉORÈME 6. — *L'opérateur* W_1 *est défini de* $\mathscr{H}$ *dans* $\mathscr{H}_1^+$. *Il est indépendant de* χ_1 *et* $\| W_1 \| \leqq 1$.

L'interprétation physique de ce résultat est la condition d'impédance de T. Damour [2]. Plus précisément le profil asymptotique des champs satisfait la condition dissipative de polarisation gauche rentrante.

Nous pouvons maintenant introduire l'opérateur de diffraction S en posant

$$W^-(U_1, U_0) = W_1^- U_1 + W_0^- U_0, \qquad W(U) = (W_1 U, W_0 U), \qquad S = WW^-.$$

Théorème 7. — W^- *est une isométrie de* $\mathscr{H}_1^- \times \mathscr{H}_0$ *sur* $\mathscr{H}$; W *est une isométrie de* $\mathscr{H}$ *sur* $\mathscr{H}_1^+ \times \mathscr{H}_0$; S *est une isométrie de* $\mathscr{H}_1^- \times \mathscr{H}_0$ *sur* $\mathscr{H}_1^+ \times \mathscr{H}_0$.

IV. Paradigme de la membrane. — Le « Paradigme de la membrane » [4] assure que l'on peut décrire de façon approchée la diffraction par un trou noir, en remplaçant celui-ci par une sphère dissipative de rayon $r_0 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon$, appelée « horizon élargi ».

Considérons le problème mixte pour les équations de Maxwell (3) dans $]r_0 + \varepsilon, +\infty[\times S^2$ en imposant sur l'horizon élargi $\Gamma_\varepsilon = \mathbb{R}_t \times \{ r = r_0 + \varepsilon \} \times S^2$ qui est de genre temps, la condition d'impédance

$$E^{\hat{\theta}} = -B^{\hat{\varphi}}, \qquad E^{\hat{\varphi}} = B^{\hat{\theta}}. \tag{5}$$

C'est un problème hyperbolique dissipatif classique dont la solution est donnée par un semi-groupe $V_\varepsilon(t)$ opérant sur l'espace de Hilbert

$$\mathscr{H}_\varepsilon = [L^2(]r_0 + \varepsilon, +\infty[_r \times S^2_\omega, r^2\, dr\, d\omega)]^6.$$

Pour $0 < \varepsilon < a$ on définit l'opérateur de diffraction

$$S_\varepsilon U_0 = \lim_{t \to +\infty} e^{it H_0} \mathscr{I}_0^* V_\varepsilon(2t) \mathscr{I}_0 e^{it H_0} U_0 \quad \text{dans } \mathscr{H}_0.$$

Théorème 8. — S_ε *est défini de* $\mathscr{H}_0$ *dans* $\mathscr{H}_0$. *Il est indépendant de* χ_0 *et* $\| S_\varepsilon \| \leqq 1$.

La diffraction à l'infini par le trou noir réel est décrite par l'opérateur S_{00} donné par :

$$\forall U_0 \in \mathscr{H}_0, \qquad S_{00} U_0 = \Pi_0 S(0, U_0)$$

où Π_0 est le projecteur de $\mathscr{H}_1^+ \times \mathscr{H}_0$ sur $\mathscr{H}_0$. Le résultat suivant est la justification mathématique de ce paradigme :

Théorème 9. — *Pour tout* U_0 *dans* $\mathscr{H}_0$, $S_\varepsilon U_0$ *tend vers* $S_{00} U_0$ *dans* $\mathscr{H}_0$ *quand* $\varepsilon \to 0$.

Du point de vue de l'approximation numérique, la condition d'impédance (5) est une condition transparente sur la frontière artificielle Γ_ε, appelée condition de radiation de Silver-Müller dans le cas euclidien. Ainsi ce théorème fournit une méthode de calcul déjà utilisée dans [4].

Tous les résultats précédents peuvent être interprétés en termes de problèmes de Cauchy caractéristiques sur la variété de Kruskal [1] et nos méthodes permettent de traiter les trous noirs sphériques généraux de De Sitter-Reissner Nordström.

Note remise le 31 juillet 1990, acceptée le 11 septembre 1990.

Références bibliographiques

[1] A. Bachelot, *Gravitational Scattering of Electromagnetic Field by Schwarzschild Black-Hole* (à paraître).
[2] Th. Damour, Black-Hole eddy currents, *Phys. Rev.*, D 18, 10, 1978, p. 3598-3604.
[3] J. Dimock, Scattering for the wave equation on the Schwarzschild metric, *Gen. Relativ. Gravitation*, 17, n° 4, 1985, p. 353-369.
[4] D. A. MacDonald et W. M. Suen, Membrane viewpoint on Black-Holes: Dynamical electromagnetic fields near the horizon, *Phys. Rev.*, D 32, n° 4, 1985, p. 848-871.

Département de Mathématiques appliquées, Unité associée au C.N.R.S. n° 226, CeReMaB, Université Bordeaux-I, 351, *cours de la Libération*, 33405 *Talence Cedex*.