ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Existence de l'opérateur de diffusion pour l'équation des ondes avec un potentiel périodique en temps.* Note de **Alain Bachelot** et **Vesselin Petkov,** présentée par Jacques-Louis Lions.

On prouve l'existence de l'opérateur de diffusion pour l'équation $\square u=q(t, x)u$ dans $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x$, n impair, $n\geqq 3$, où q est périodique en temps et à support compact en x, sous l'hypothèse que l'énergie est uniformément bornée. On étend ce résultat aux systèmes de premier ordre, comme le système de Dirac.

MATHEMATICAL ANALYSIS. — Existence of scattering operator for the wave equation with time-periodic potential.

We prove the existence of the scattering operator for the equation $\square u=q(t, x)u$ in $\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x$, n odd, $n\geqq 3$, where q is periodic with respect to the time and with a compact support in x, provided the energy uniformly bounded. We extend this result to first order systems like the system of Dirac.

I. NOTATIONS. — On considère l'équation

$$\square u=q(t, x)u,\qquad t\in\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad n \text{ impair},\quad n\geqq 3,$$

où q satisfait les conditions :

$$(\mathrm{H}_1)\quad\begin{cases}(a)\ \text{il existe } \mathrm{T}>0 \text{ tel que pour tous } t,\ x,\quad q(t+\mathrm{T}, x)=q(t, x);\\ (b)\ \text{il existe } \rho>0 \text{ tel que pour tout } t \text{ le support de } q(t, x) \text{ est inclus dans } \{x;\ |x|\leqq\rho\};\\ (c)\ q \text{ est dans } \mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)).\end{cases}$$

Soit H le complété de $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\times\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ pour la norme

$$\|(f_1, f_2)\|^2=\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla_x f_1(x)|^2+|f_2(x)|^2)\,dx.$$

On note $\mathrm{U}_0(t)$ le groupe unitaire dans H associé au problème de Cauchy

$$(1)\qquad \square u=0,\qquad u(0, x)=f_1(x),\qquad u_t(0, x)=f_2(x).$$

On considère le problème perturbé

$$(2)\qquad\begin{cases}\square u=q(t, x)u,\\ u(s, x)=f_1(x),\qquad u_t(s, x)=f_2(x).\end{cases}$$

Sous l'hypothèse (H_1), étant donné (f_1, f_2) dans H, il existe une unique solution $(u(t), u_t(t))$ de (2) dans $\mathrm{C}^0(\mathbb{R}, \mathrm{H})$. L'application

$$\mathrm{H}\ni(f_1, f_2)\to\mathrm{U}(t, s)(f_1, f_2)=(u(t), u_t(t))$$

vérifie les propriétés :

(i) $\forall t, r, s\in\mathbb{R}$ on a $\mathrm{U}(t, s)\mathrm{U}(s, r)=\mathrm{U}(t, r)$;

(ii) $\forall t, s\in\mathbb{R}$ on a $\mathrm{U}(t+\mathrm{T}, s+\mathrm{T})=\mathrm{U}(t, s)$.

On fait l'hypothèse que l'énergie est uniformément bornée :

(H_2) il existe $c>0$ tel que pour tout $f\in\mathrm{H}$ et tous $t, s\in\mathbb{R}$ on a $\|\mathrm{U}(t, s)f\|\leqq c\|f\|$.

Des conditions suffisantes pour que (H_2) soit vérifiée ont été obtenues par G. Perla Menzala ([8], [9]).

II. RÉSULTAT FONDAMENTAL. — On s'intéresse à l'existence de

$$(3)\qquad \mathrm{W}_-f=\lim_{t\to+\infty}\mathrm{U}(0, -t)\mathrm{U}_0(-t)f,$$

$$(4)\qquad \mathrm{W}f=\lim_{t\to+\infty}\mathrm{U}_0(-t)\mathrm{U}(t, 0)f.$$

0249-6291/86/03030671 $ 2.00

On note H_b le sous-espace engendré par les vecteurs propres de V^* associés aux valeurs propres de module 1, où V^* est l'adjoint de l'opérateur de monodromie $V=U(T, 0)$.

PROPOSITION. — *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2), *l'opérateur* W_- *est défini pour tout* f *dans* H *et on a la relation*

$$\overline{\operatorname{Im} W_-}\subset H_b^{\perp}. \tag{5}$$

Remarques. — 1. La démonstration repose sur l'application de la méthode de Cook et reste valable pour les dimensions paires.

2. La relation (5) joue un rôle important dans la théorie de la diffusion pour les systèmes dissipatifs [3] et pour les obstacles mouvants [10].

THÉORÈME 1. — *Sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2), n *étant impair,* $n\geqq 3$, *la limite* Wf *définie par* (4) *existe pour tout* f *dans* $H_b^{\perp}$.

Le théorème 1 et la proposition assurent l'existence de l'opérateur de diffusion

$$S=W\circ W_-$$

déterminé sur H.

Sous des hypothèses plus fortes mais sans supposer la périodicité de q, G. Perla Menzala [9] a établi l'existence de W sur H. En général l'espace H_b n'est pas trivial et l'existence de valeurs propres de module 1 est liée à l'existence des pôles réels de la matrice de diffusion (*cf.* [1], [2]).

III. DÉCROISSANCE DE L'ÉNERGIE LOCALE ET EXISTENCE DE W. — On introduit la norme de l'énergie locale pour $R\geqq\rho$:

$$\|u(t)\|_{E_R}^2=\int_{|x|\leqq R}(|\nabla_x u(t, x)|^2+|u_t(t, x)|^2)\,dx.$$

LEMME. — *Soit* $R\geqq\rho$ *fixé; alors la solution* u *de* (2) *avec* (f_1, f_2) *dans* $H_b^{\perp}$ *vérifie*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\|u(t)\|_{E_R}^2\,dt=0. \tag{6}$$

La condition (6) est plus faible que la condition d'intégrabilité de l'énergie locale utilisée dans [8] et [9]. La démonstration du lemme repose sur le théorème de type RAGE obtenu par V. Georgiev et V. Petkov pour des opérateurs à puissances bornées (*cf.* [4], [10]) qui permet de trouver une sous-suite $n_k\in\mathbb{N}$ telle que $V^{n_k}f$ converge faiblement vers 0 si f est dans $H_b^{\perp}$.

On obtient la convergence forte en utilisant la compacité de l'opérateur $\varphi\,U(t, 0)\,\varphi$ pour t assez grand où φ est une fonction de troncature convenable.

Pour établir l'existence de W on considère

$$v_s(t)\,f=U(t, 0)\,f-U_0(t-s)\,U(s, 0)\,f,\qquad s\leqq t.$$

En tenant compte du lemme on prouve que pour tout $\varepsilon>0$ il existe T_1 et T_2 tels que

$$\sup_{t\geqq T_2}\|v_{T_1}(t)\|\leqq\varepsilon.$$

On en déduit que $U_0(-t)\,U(t, 0)\,f$ est une suite de Cauchy de façon analogue à [12].

IV. GÉNÉRALISATIONS AUX SYSTÈMES DU PREMIER ORDRE. — On considère le système symétrique

$$L\psi=\partial_t\psi-\sum_{j=1}^{n}A_j\,\partial_{x_j}\psi-i\,V(t, x)\,\psi, \tag{7}$$

n impair, $n \geqq 3$, où les A_j sont des matrices hermitiennes $N \times N$ à coefficients constants et $V(t, x)$ est une matrice hermitienne $N \times N$ dont les coefficients satisfont (H_1). On suppose que pour tout $\xi \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$, la matrice $A(\xi) = \sum_{j=1}^{n} A_j \xi_j$ est inversible.

On considère le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} L\psi = 0, \\ \psi(s, x) = f(x). \end{array}\right. \tag{8}$$

Étant donné f dans $\mathscr{H} = (L^2(\mathbb{R}^n))^N$, la solution ψ de (8) s'exprime à l'aide d'un opérateur $U(t, s)$:

$$\psi(t) = U(t, s) f$$

et

$$\text{pour tous } t, s \in \mathbb{R}, \text{ on a } \| U(t, s) f \| = \| f \|. \tag{9}$$

THÉORÈME 2. — *Soit $\mathscr{H}_b$ l'espace associé à $U(T,0)^*$ comme ci-dessus. On a alors :*

(*a*) *Pour tout f dans $\mathscr{H}$, $W_- f$ existe et appartient à $\mathscr{H}_b^\perp$.*

(*b*) *Pour tout f dans $\mathscr{H}_b^\perp$, Wf existe et appartient à $\mathscr{H}$.*

Ce résultat s'applique en particulier au système de Dirac avec masse nulle, en présence d'un potentiel périodique. Le cas du potentiel indépendant du temps est étudié dans [5].

La démonstration du théorème 2 est analogue à l'étude de l'équation des ondes; la propriété (9) remplace l'hypothèse (H_2).

Reçue le 24 mars 1986, acceptée le 22 juillet 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J. COOPER et W. STRAUSS, *J. Funct. Anal.*, 47, 1982, p. 180-229.
[2] J. COOPER et W. STRAUSS, *Indiana Univ. Math. J.*, 34, 1985, p. 33-83.
[3] V. GEORGIEV, *J. Operator Theory*, 14, 1985, p. 291-310.
[4] V. GEORGIEV et V. PETKOV, *Comptes rendus*, 303, série I, 1986, p. 605-608.
[5] J.-C. GUILLOT et G. SCHMIDT, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 55, 1974, p. 193-206.
[6] J. S. HOWLAND, *Math. Ann.*, 207, 1974, p. 315-335.
[7] P. D. LAX et R. PHILLIPS, *Scattering Theory*, Academic Press, New York, 1967.
[8] G. PERLA MENZALA, *Ann. Scuola Norm. Pisa*, 11, 1984, p. 541-558.
[9] G. PERLA MENZALA, *Comptes rendus*, 300, série I, 1985, p. 621-624.
[10] V. PETKOV, Scattering theorey for mixed problems in the exteriour of moving obstacles, *Intern. Conf. on Hyperbolic Eq. and Related Topics*, Padova, 1985 (à paraître).
[11] R. PHILIPS, *Indiana Univ. Math. J.*, 31, 1982, p. 602-639.
[12] W. STRAUSS, *J. Funct. Anal.*, 31, 1979, p. 255-262.

Université de Bordeaux-I, U.E.R. de Mathématiques et Informatique,
Unité associée au C.N.R.S. 226, 351, *cours de la Libération*, 33405 *Talence Cedex;*
Institut de Mathématiques de l'Académie des Sciences bulgare,
P.O. Box 373, 1090 *Sofia, Bulgarie.*