

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. — *Équipartition de l'énergie pour les systèmes hyperboliques et formes compatibles.* Note de **Alain Bachelot**, présentée par Jacques-Louis Lions.

Étant donné un système hyperbolique hermitien du premier ordre et une forme sesquilinéaire q , une condition nécessaire et suffisante pour que $I(t) = \int q(\psi(t, x), \psi(t, x)) dx$ tende vers zéro pour toute solution ψ d'énergie finie si $|t|$ tend vers l'infini, est que q soit compatible avec le système au sens de [7] et [8]. Si le système est fortement hyperbolique et la dimension d'espace impaire, $I(t)$ s'annule en temps fini pour les données à support compact. On en déduit l'équipartition de l'énergie pour les systèmes de Dirac et de Maxwell, les équations d'onde du second ordre, les ondes élastiques anisotropes, les ondes magnétoélastiques.

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS. — Equipartition of energy for hyperbolic systems and compatible forms.

Given an hermitian first order system and a sesquilinear form q , a necessary and sufficient condition for $I(t) = \int q(\psi(t, x), \psi(t, x)) dx \rightarrow 0$ if $|t| \rightarrow \infty$ for any finite energy solution ψ is q is compatible with the system following [7] and [8]. If the system is strongly hyperbolic and the space dimension is odd, $I(t) = 0$ after a finite time for the solutions with initial data with compact support. It follows the equipartition of energy for the Dirac's system, Maxwell's system, second order wave equations, anisotropic elastic waves, magnetoelastic waves.

I. INTRODUCTION. — On considère un opérateur hyperbolique hermitien \mathcal{L} de la forme :

$$(1) \quad \mathcal{L} = I \partial_t + \sum_{i=1}^n A_i \partial_{x_i}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où les A_i sont des matrices hermitiennes $N \times N$ à coefficients constants. Une solution libre d'énergie finie $\psi(t, x)$ vérifie :

$$(2) \quad \mathcal{L} \psi = 0, \quad \psi(0, x) = \psi_0(x),$$

où ψ_0 appartient à $(L^2(\mathbb{R}^n))^N$ et l'énergie de ψ est conservée :

$$\int |\psi(t, x)|^2 dx = \text{Cte}.$$

Soit q une forme sesquilinéaire sur \mathbb{C}^N ; on pose :

$$I(t) = \int q(\psi(t, x), \psi(t, x)) dx.$$

L'étude du comportement asymptotique de $I(t)$ quand $|t|$ tend vers l'infini conduit à distinguer certaines formes. On associe à l'opérateur \mathcal{L} la matrice hermitienne $A(\xi)$ définie pour tout ξ de \mathbb{R}^n par :

$$A(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i A_i, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

DÉFINITION. — Soit \mathcal{L} un système hyperbolique hermitien vérifiant (1). On dit qu'une forme sesquilinéaire q sur \mathbb{C}^N est (presque partout) compatible avec \mathcal{L} , si pour (presque) tout ξ non nul de \mathbb{R}^n , les vecteurs propres de $A(\xi)$ sont isotropes pour q .

Si la multiplicité des valeurs propres de $A(\xi)$ est constante pour ξ non nul, une forme presque partout compatible est compatible.

La notion de compatibilité a été introduite par B. Hanouzet et J.-L. Joly qui, en particulier, l'ont appliquée à l'étude du comportement asymptotique de $q(\psi(t, x), \psi(t, x))$ ([7], [8]).

L'objet de cette Note est de montrer que $I(t)$ tend vers zéro quand $|t|$ tend vers l'infini si et seulement si q est presque partout compatible. On en déduit très simplement les résultats d'équipartition de l'énergie pour des systèmes de la Physique. On trouvera dans [1] le détail des démonstrations.

II. PRINCIPAUX RÉSULTATS. — On exprime $I(t)$ à l'aide de l'identité de Parseval et des coordonnées polaires, $\xi = \rho\omega$, $0 < \rho$, $\omega \in S^{n-1}$:

$$(3) \quad I(t) = \int_{S^{n-1}} J(t; \omega) d\omega,$$

$$(4) \quad J(t; \omega) = \sum_{j, h} \int_0^\infty e^{-it\rho(\lambda_j(\omega) - \lambda_h(\omega))} q(P_j(\omega)\hat{\Psi}_0(\rho\omega), P_h(\omega), \hat{\Psi}_0(\rho\omega)) \rho^{n-1} d\rho,$$

où λ_j et P_j désignent respectivement les valeurs propres et les projecteurs propres de $A(\omega)$. Par la compatibilité, ne figurent dans la somme (4) que les termes pour lesquels $\lambda_j(\omega) \neq \lambda_h(\omega)$. Le lemme de Riemann-Lebesgue implique alors que $J(t; \omega)$ tend vers zéro quand $|t|$ tend vers l'infini, et on applique le théorème de convergence dominée à (3).

THÉORÈME 1. — Soient \mathcal{L} un opérateur hyperbolique vérifiant (1) et q une forme sesquilinéaire. Pour que $I(t)$ tende vers zéro pour toute solution libre d'énergie finie quand $|t|$ tend vers l'infini, il faut et il suffit que q soit presque partout compatible avec \mathcal{L} .

Si la multiplicité des λ_j est constante sur S^{n-1} , on peut appliquer à (4) le théorème de la phase stationnaire ou, si n est impair, le théorème de Paley-Wiener et préciser alors la rapidité de décroissance de $I(t)$.

THÉORÈME 2. — On suppose que l'opérateur \mathcal{L} est fortement hyperbolique. Soient une forme sesquilinéaire compatible q et Ψ_0 dans $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n))^N$. Alors :

$$d_t^k I(t) = O(|t|^{-n-k}), \quad |t| \rightarrow \infty,$$

et, si de plus, zéro n'est pas dans le support de $\hat{\Psi}_0$, $I(t)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

THÉORÈME 3 (Équipartition en temps fini). — On suppose que l'opérateur \mathcal{L} est fortement hyperbolique et que n est impair. Soient q une forme sesquilinéaire compatible et Ψ_0 dans $(L^2(\mathbb{R}^n))^N$ de support contenu dans $\{x; |x| \leq R\}$. Alors :

$$I(t) = 0, \quad |t| \geq 2R\delta^{-1},$$

où

$$\delta = \inf \{ |\lambda_j(\omega) - \lambda_h(\omega)|; \lambda_j \neq \lambda_h, \omega \in S^{n-1} \}.$$

Remarques. — 1° On a un résultat analogue au théorème 1 pour les opérateurs $\mathcal{L} = I\partial_t + \sum_{j=1}^n A_j \partial_{x_j} + iB$ où B est une matrice hermitienne.

2° La forte hyperbolicité et la compatibilité ne sont pas nécessaires dans le théorème 3. Si $A(\xi)$ est la matrice diagonale $(\delta_{ij} \langle C_i, \xi \rangle)$ où $C_i \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ et $q(u, v) = \sum a_{ij} u_i v_j$, $a_{ij} = 0$ si $C_i = C_j$, q est presque partout compatible mais n'est pas compatible et néanmoins $I(t) = 0$ pour $|t| \geq 2R\delta^{-1}$, $\delta = \min \{ |C_i - C_j|, C_i \neq C_j \}$.

3° Dans les applications, il arrive que les vecteurs de $\text{Ker } A(\xi)$ ne soient pas isotropes pour q . Les résultats précédents restent valables si on suppose que pour tout $\xi \neq 0$ la projection orthogonale de $\hat{\Psi}_0(\xi)$ sur $\text{Ker } A(\xi)$ est nulle.

III. APPLICATIONS ET EXEMPLES. — De nombreux cas particuliers d'équipartition de l'énergie pour des systèmes de la Physique ont été étudiés mais un procédé systématique de détermination de toutes les formes possibles d'équipartition ne semble pas connu.

Le théorème 1 donne une telle méthode, générale et très simple : il suffit de vérifier la condition algébrique de compatibilité; de plus, le théorème 3 montre qu'en dimension impaire l'équipartition a lieu en temps fini.

Système de Maxwell. — Le champ électromagnétique (E, H) dans le vide vérifie les équations :

$$(5) \quad \partial_t E = \text{rot } H, \quad \partial_t H = -\text{rot } E,$$

$$(6) \quad \text{div } E = 0, \quad \text{div } H = 0.$$

En tenant compte, grâce à (6), de la remarque 3, on peut appliquer les théorèmes 1, 2, 3 aux formes $|E|^2 - |H|^2$ et $\langle E, H \rangle$ et obtenir l'équipartition entre l'énergie électrique et l'énergie magnétique, et l'orthogonalité des deux champs [3].

Système de Dirac. — $\partial_t \psi + (\alpha \cdot \nabla - i\beta M) \psi = 0$; d'après [7] une forme compatible q est de la forme :

$$q(\psi, \psi) = c(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2) + c'(\psi_1 \bar{\psi}_3 + \psi_2 \bar{\psi}_4 - \psi_3 \bar{\psi}_1 - \psi_4 \bar{\psi}_2),$$

avec $c=0$ si $M \neq 0$. L'équipartition pour $c=1$, $c'=0$ ($M=0$) exprime l'équipartition de la charge [2]. L'équipartition en temps fini et l'équipartition pour $c' \neq 0$ ne semblent pas avoir été remarquées.

Équations des ondes et de Klein-Gordon. — $\square u + m^2 u = 0$; on retrouve l'équipartition entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en appliquant le théorème 1 à

$$I(t) = \int |u_t|^2 - |\nabla u|^2 - m^2 |u|^2 dx; \text{ si } m=0 \text{ on peut appliquer le théorème 3 ([6]).}$$

Équations du second ordre. — Soit ψ la solution de :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 \psi - (A(d))^2 \psi = 0, \quad A(d) = \sum_{i=1}^n A_i \partial_{x_i} \\ \psi(0, x) = \psi_0(x), \quad \psi_t(0, x) = \psi_1(x); \quad A(d)\psi_0, \psi_1 \in (L^2(\mathbb{R}^n))^N, \end{array} \right.$$

où les A_i sont des matrices hermitiennes $N \times N$. L'énergie cinétique K et l'énergie potentielle P sont données par :

$$K(t) = \int |\partial_t \psi(t, x)|^2 dx, \quad P(t) = \int |A(d)\psi(t, x)|^2 dx.$$

THÉORÈME 4. — On suppose que pour presque tout ξ , $\text{Ker } A(\xi) = 0$. Alors en notant $E = K(t) + P(t)$ l'énergie conservée, on a :

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} K(t) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} P(t) = \frac{1}{2} E.$$

On suppose de plus que n est impair et que les valeurs propres λ_j de $A(\xi)$ sont de multiplicité constantes et vérifient :

$$(8) \quad 0 < \lambda_1(\xi) < \dots < \lambda_p(\xi), \quad |\xi| = 1.$$

Alors si le support des données initiales est dans $\{x; |x| \leq R\}$, l'énergie potentielle et l'énergie cinétique d'une solution de vitesse $|\lambda_j|$ sont égales pour $|t| \geq R \lambda_j^{-1}$, où $\lambda_j = \inf_{\omega \in S^{n-1}} \lambda_j(\omega)$; en particulier :

$$K(t) = P(t), \quad |t| \geq R \lambda_1^{-1}.$$

On a un résultat analogue pour les équations $\partial_t^2 \psi - (A(d))^2 \psi + B^2 \psi = 0$, où B est une matrice hermitienne. Le théorème 4 s'applique à deux équations d'onde vérifiant (7), (8) :

Ondes élastiques en milieu anisotrope [5]. — Avec les notations habituelles, le champ de déplacement dans un milieu homogène élastique anisotrope obéit à l'équation :

$$\partial_t^2 u_i - \rho^{-1} c_{ijkl} \partial_{x_j x_l}^2 u_k = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Le théorème 4 implique l'équipartition entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$K(t) = \sum_{i=1}^3 \int \rho |\partial_t u_i|^2 dx, \quad P(t) = \sum_{i=1}^3 \int c_{ijkl} \partial_{x_j} u_i \partial_{x_l} u_k dx.$$

Ondes magnétoélastiques [4]. — Le vecteur déplacement u pour un milieu conducteur isotrope homogène élastique soumis à un champ magnétique constant et uniforme H vérifie :

$$\rho \partial_t^2 u = \mu^2 \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) + \frac{\mu_0}{4\pi} (\nabla \times h) \times H,$$

$$h = \nabla \times (u \times H).$$

Il y a équipartition entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle totale, somme de l'énergie potentielle mécanique et de l'énergie d'interaction magnétique :

$$K(t) = \rho \int |\partial_t u|^2 dx; \quad P(t) = \int \mu |\nabla u|^2 + (\lambda + \mu) |\nabla \cdot u|^2 + \frac{\mu_0}{4\pi} |h|^2 dx.$$

Reçue le 29 juillet 1985.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. BACHELOT, *Publications d'Analyse appliquée de l'Université de Bordeaux-I*, n° 8517.
- [2] D. G. COSTA et W. A. STRAUSS, *Quart. Appl. Math.*, 39, 1981, p. 351-361.
- [3] G. DASSIOS, *Quart. Appl. Math.*, 37, (4), 1980, p. 465-469.
- [4] G. DASSIOS, *Quart. Appl. Math.*, 39, (4), 1982, p. 479-490.
- [5] G. DASSIOS et M. GRILLAKIS, *J. Diff. Equat.*, 51, 1984, p. 408-418.
- [6] R. J. DUFFIN, *J. Math. Anal. Appl.*, 32, 1970, p. 386-391.
- [7] B. HANOZET et J.-L. JOLY, *Research Notes in Math.*, 89, Pitman, 1983, p. 208-217.
- [8] B. HANOZET et J.-L. JOLY, *Comptes rendus*, 301, série I, 1985, p. 491-494 et *Publications d'Analyse appliquée de l'Université de Bordeaux-I*, n° 8516.

U.E.R. de Mathématiques et Informatique,
Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 040226, Université de Bordeaux-I,
351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.