ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Applications bilinéaires compatibles avec un système différentiel à coefficients variables.

Note de **Alain Bachelot** et **Bernard Hanouzet**, présentée par Jacques-Louis Lions.

Remise le 2 juillet 1984.

On montre que pour une matrice carrée $(f_{jk}(x))$ compatible avec un système $\mathrm{A}(x, \mathrm{D})=\sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i(x)\mathrm{D}_i$ on peut définir $\sum_{1\leqq j,\, k\leqq \mathrm{N}} f_{jk}(x)u_j v_k$ sur des sous-espaces de Sobolev ou de Besov. On obtient ainsi des résultats de compacité par compensation dans le cas des systèmes à coefficients variables.

MATHEMATICAL ANALYSIS. — Bilinear Applications Compatible with a Differential System with Variable Coefficients.

Given a square matrix $(f_{jk}(x))$ *compatible with the system* $\mathrm{A}(x, \mathrm{D})=\sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i(x)\mathrm{D}_i$ *we define* $\sum_{1\leqq j,\, k\leqq \mathrm{N}} f_{jk}(x)u_j v_k$ *on Sobolev or Besov subspaces. New results on compensated compactness are obtained for systems with variable coefficients.*

I. Introduction. — Dans [4], [5], [6] on interprète en particulier des résultats sur la compacité par compensation de F. Murat et L. Tartar ([8], [9]) comme conséquence d'une formule de produit dans des sous-espaces des espaces de Sobolev $\mathrm{H}^s(\mathbb{R}^n)$. Nous reprenons ici cette formulation en précisant la régularité de l'espace dans lequel est défini le produit, en passant de la théorie L^2 à la théorie L^p et en prenant en compte le cas des systèmes du premier ordre à coefficients variables, ce qui permet, en particulier, d'obtenir des résultats nouveaux de compacité par compensation. Nous choisissons de présenter ici le cas des espaces de Besov B^s_{pq}, les résultats pour les espaces de Sobolev $\mathrm{H}^s_p=\{u \mid \mathscr{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^{1/2}\mathscr{F}u\in \mathrm{L}^p\}$ sont analogues; pour le détail des démonstrations nous renvoyons à A. Bachelot [1] et B. Hanouzet [3]. Les méthodes utilisées suivent de près celles de J.-M. Bony [2] et Y. Meyer [7], les espaces sont caractérisés à l'aide d'une décomposition de Littlewood Paley, un produit est écrit comme somme de deux paraproduits et d'un reste. Nous utilisons dans la suite la notation suivante : $a\wedge b=\min\{a, b\}$, $a\vee b=\max\{a, b\}$.

II. Paraproduits et produits dans B^s_{pq}. — Rappelons tout d'abord une caractérisation de $\mathrm{B}^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$. Soit $\{\Gamma_j\}_{j\geqq -1}$ un recouvrement de $\mathbb{R}^n$ par des couronnes dyadiques :

$$\Gamma_{-1}=\left\{\xi\in\mathbb{R}^{\mathrm{N}};\ |\xi|\leqq\frac{\mathrm{R}}{2}\right\},$$
$$\Gamma_j=\{\xi\in\mathbb{R}^n;\ r^{-1}\,2^j\leqq|\xi|\leqq \mathrm{R}\,2^j\},\qquad j\geqq 0,$$

où $r>1$, $\mathrm{R}\geqq 1$, $r\mathrm{R}>2$. Soit $s\in\mathbb{R}$, $p, q\in[1, +\infty]$; pour que f soit dans B^s_{pq} il faut et il suffit qu'il existe une suite $\{a_j\}_{j\geqq -1}$ de distributions tempérées vérifiant les propriétés suivantes :

(i) le spectre de a_j est contenu dans Γ_j, $j\geqq -1$;

(ii) $\{2^{js}\|a_j\|_{\mathrm{L}^p}\}_{j\geqq -1}\in l^q$

et telle que $f=\sum_{j\geqq -1} a_j$.

De plus, si f est dans B^s_{pq}, une décomposition de Littlewood Paley de f, $f=\sum_{j\geqq -1} f_j$, vérifie les propriétés (i) et (ii).

On décompose alors le produit fg comme :

$$fg=\Big(\sum_{k\geq -1} f_k\Big)\Big(\sum_{l\geq -1} g_l\Big)=\pi(f, g)+\pi(g, f)+\rho(f, g)$$

$$=\sum\sum_{-1\leq k\leq l-N} f_k\, g_l+\sum\sum_{-1\leq l\leq k-N} f_k\, g_l+\sum\sum_{|k-l|<N} f_k\, g_l,$$

où N est un entier choisi assez grand, et on étudie la régularité des deux paraproduits $\pi(f, g)$ et $\pi(g, f)$ et du reste $\rho(f, g)$.

Soit :

$$p_1,\ p_2\in[1,\ +\infty],\qquad p\geq 1\vee\frac{p_1 p_2}{p_1+p_2},\qquad \frac{1}{m}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p}.$$

On obtient :

Proposition 1. — *On suppose $p\leq p_2$. Le paraproduit $(f, g)\to\pi(f, g)$ est continu de $B^s_{p_1 q_1}\times B^t_{p_2 q_2}$ dans $B^\tau_{p q_2}$ où :*

(1) *si* $s\neq\dfrac{n}{m}$ *ou* $q_1=1$, $\quad\tau=t\wedge\left(s+t-\dfrac{n}{m}\right)$;

(2) *si* $s=\dfrac{n}{m}$ *et* $q_1>1$, $\quad\tau<t$.

Proposition 2. — *Le reste $(f, g)\to\rho(f, g)$ est continu de $B^s_{p_1 q_1}\times B^t_{p_2 q_2}$ dans $B^{s+t-(n/m)}_{pq}$ où :*

(1) *si* $s+t\geq 0\vee n\left(\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}-1\right)$, $\quad q\geq 1\vee\dfrac{q_1 q_2}{q_1+q_2}$;

(2) *si* $s+t=0\vee n\left(\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}-1\right)$ *et* $\dfrac{1}{q_1}+\dfrac{1}{q_2}\geq 1$, $\quad q=+\infty$.

En utilisant la décomposition du produit, on a immédiatement :

Proposition 3. — *On suppose $p\leq p_1\wedge p_2$. Le produit $(f, g)\to fg$ est continu de $B^s_{p_1 q_1}\times B^t_{p_2 q_2}$ dans B^σ_{pq} où :*

(1) *si* $s+t\geq 0\vee n\left(\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}-1\right)$, $\quad q\geq q_1\vee q_2$, $\quad\sigma=s\wedge t\wedge\left(s+t-\dfrac{n}{m}\right)$

[*sauf si $s=n/m$ et $q_1>1$ ou $t=n/m$ et $q_2>1$ auquel cas* : $\sigma=s\wedge t\wedge(s+t-(n/m)-\varepsilon)$, $\varepsilon>0$];

(2) $\left\{\begin{array}{l} si\quad s+t=0\vee n\left(\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}-1\right)\quad et\quad \dfrac{1}{q_1}+\dfrac{1}{q_2}\geq 1,\qquad q\geq q_1\vee q_2,\\ \sigma=s\wedge t\wedge\left(s+t-\dfrac{n}{m}-\varepsilon\right),\qquad \varepsilon>0.\end{array}\right.$

III. Produit généralisé compatible avec un système. — Soit $F(x)=(f_{ij}(x))_{1\leq i,\, j\leq N}$ une matrice carrée à coefficients réguliers; on appelle produit généralisé une expression de la forme :

$$f(x;\, u,\, v)=(u\,|\,\mathrm{F}(x)\, v)=\sum_{i,\, j=1}^{n} f_{ij}(x)\, u_i\, v_j.$$

En appliquant les résultats du II, il est clair que l'application $(u, v)\to f(x; u, v)$ est bilinéaire continue de $((\mathrm{B}^s_{pq\mathrm{loc}})^{\mathrm{N}})^2$ dans $\mathrm{B}^\sigma_{pq\mathrm{loc}}$ où :

(1) $$\text{si}\quad s\geqq 0\vee n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right),\qquad \sigma=s\wedge\left(2\,s-\frac{n}{p}\right)$$

[sauf si $s=n/p$ et $q>1$, auquel cas $\sigma=s\wedge(2\,s-(n/p)-\varepsilon)$, $\varepsilon>0$] :

(2) $$\text{si}\quad s=0\vee n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\quad\text{et } q\leqq 2,\quad \sigma=s\wedge\left(2\,s-\frac{n}{p}-\varepsilon\right),\quad \varepsilon>0.$$

On veut définir plus généralement $f(x; u, v)$ en relâchant les conditions sur s par des conditions de régularité sur des groupements de dérivées de u et v. Plus précisément, on donne un système du premier ordre $\mathrm{A}(x, \mathrm{D})=\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathrm{A}_i(x)\,\mathrm{D}_i$, où chaque $\mathrm{A}_i(x)$ est une matrice $\mathrm{M}\times\mathrm{N}$ à coefficients réguliers, auquel on associe le symbole $a(x, \xi)=\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\xi_i\,\mathrm{A}_i(x)$.

DÉFINITION. — *On dit que le produit généralisé $f(x; u, v)$ est régulièrement compatible avec le système $\mathrm{A}(x, \mathrm{D})$ s'il existe deux matrices $\mathrm{P}(x, \xi)$, $\mathrm{Q}(x, \xi)$ dont les coefficients sont $\mathscr{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^n_x\times(\mathbb{R}^n_\xi\setminus 0)$, homogènes de degré -1 en ξ, telles que* :

(1) $$\left.\begin{array}{l}\forall\, x\in\mathbb{R}^n\\ \forall\,\xi\neq 0\end{array}\right\}\ \mathrm{F}(x)={}^t a(x, \xi)\,\mathrm{P}(x, \xi)+{}^t\mathrm{Q}(x, \xi)\, a(x, \xi).$$

Nous introduisons encore l'espace :

$$\mathrm{B}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{A}, s, t, p, q)=\{u\in(\mathrm{B}^s_{pq\mathrm{loc}})^{\mathrm{N}};\ \mathrm{A}(x, \mathrm{D})\, u\in(\mathrm{B}^t_{pq\mathrm{loc}})^{\mathrm{M}}\},$$

pour exprimer les conditions de régularité supplémentaires. Le résultat principal est alors le suivant :

THÉORÈME. — *Soient s et t deux réels tels que $s-1<t\leqq s\leqq 0\vee n((1/p)-(1/2))$ et soit $f(x; u, v)$ un produit généralisé régulièrement compatible avec le système $\mathrm{A}(x, \mathrm{D})$:*

(1) *si $s+t+1>0\vee n((2/p)-1)$ le produit est continu de $(\mathrm{B}_{\mathrm{loc}})^2$ dans $\mathrm{B}^{s\wedge(2s-(n/p))}_{pq\mathrm{loc}}$;*
(2) *si $s+t+1=0\vee n((2/p)-1)$ et $q\leqq 2$ le produit est continu de $(\mathrm{B}_{\mathrm{loc}})^2$ dans $\mathrm{B}^{s\wedge(2s-(n/p))}_{p\infty\mathrm{loc}}$.*

Remarques. — 1. Nous supposons ici que $s\leqq 0\vee n((1/p)-(1/2))$ car sinon la proposition 3 s'applique et la compatibilité de f avec A n'apporte rien.

2. L'espace d'arrivée $\mathrm{B}^{s\wedge(2s-(n/p))}$ ne dépend pas de $t\in]s-1, s]$; la condition $\mathrm{A}(x, \mathrm{D})\, u\in(\mathrm{B}^t_{pq\mathrm{loc}})^{\mathrm{M}}$ n'a donc servi qu'à relâcher les conditions sur s.

La démonstration utilise le caractère régularisant de $\mathrm{P}(x, \xi)$ et $\mathrm{Q}(x, \xi)$, les résultats du II et aussi la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — *Soit* $f=\sum_{l\geq -1} f_l$ *une décomposition de Littlewood-Paley de* $f\in B^s_{p_1 q_1}$, $\{g^l\}_{l\geq -1}$, *une suite bornée dans* $B^t_{p_2 q_2}$. *Alors* $\sum_{l=-1}^{\infty} f_l g^l \in B^\sigma_{pq}$ *où* $\sigma = s\wedge(t-\varepsilon)\wedge(s+t-(n/m)-\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ *sous les conditions suivantes* :

$$1\vee\frac{p_1 p_2}{p_1+p_2}\leqq p\leqq p_1\wedge p_2;\qquad q\geqq q_1;$$

$$\frac{1}{m}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p};\qquad s+t>0\vee n\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-1\right)$$

$$ou\qquad s+t=0\vee n\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-1\right)\qquad et\qquad \frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}\geqq 1.$$

IV. EXEMPLES ET APPLICATIONS. — 1° Soient ω_1 et ω_2 deux formes différentielles telles que $\omega_i\in B_{\text{loc}}$ (d, s, t, p, q) (d est la différentiation extérieure); alors $\omega_1\wedge\omega_2$ est régulièrement compatible avec d et on peut appliquer le théorème. En particulier, soient φ et $\psi\in H^1(\mathbb{R}^n)$; alors $\nabla\varphi\wedge\nabla\psi\in H^{-n/2}$ (pour $n=2$, cette propriété est connue sous le nom du théorème de Hecky).

2° Soit $L(x, D)$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre 2 à coefficients réguliers : $L(x, D)=\sum b_{ij}(x) D_i D_j+\sum b_i(x) D_i+b_0(x)\,\text{Id}$ et posons $B(x)=(b_{ij}(x))_{1\leqq i,j\leqq n}$. Soit $\varphi\in B^{s+1}_{pq\text{loc}}$ avec $L(x, D)\varphi\in B^t_{pq\text{loc}}$; alors si :

$$s+t+1\geqq 0\vee n\left(\frac{2}{p}-1\right),\ (\nabla\varphi\mid B(x)\nabla\varphi)\in B^\sigma_{pq\text{loc}},$$

$$\sigma=s\wedge\left(2s-\frac{n}{p}\right)\qquad\text{ou}\qquad s\wedge\left(2s-\frac{n}{p}-\varepsilon\right)$$

suivant les cas.

3° *En conclusion*, remarquons que le théorème fournit un résultat de compacité par compensation à coefficients variables; en effet, sous les hypothèses de compatibilité, pour $s+t+1>0\vee n((2/p)-1)$ le produit généralisé est séquentiellement faiblement continu de $(B_{\text{loc}})^2$ ans $B^\sigma_{pq\text{loc}}$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. BACHELOT, Publications d'Analyse Appliquée de l'Université de Bordeaux-I, n° 8406.
[2] J.-M. BONY, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, 14, 1981, p. 209-246.
[3] B. HANOUZET, Publications d'Analyse Appliquée de l'Université de Bordeaux-I, nos 8316 et 8410.
[4] B. HANOUZET et J.-L. JOLY, *Comptes rendus*, 294, série I, 1982, p. 745-747.
[5] B. HANOUZET et J.-L. JOLY, *Séminaire École Polytechnique Goulaouic-Meyer-Schwartz*, n° XIV, 1982.
[6] B. HANOUZET et J.-L. JOLY, *Research Notes in Math.*, 89, Pitman, Boston-London-Melbourne, 1983.
[7] Y. MEYER, *Supplemento di rendiconti del circolo matematico di Palermo*, série II, n° 1, 1981.
[8] F. MURAT, *Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa*, 8, 1981, p. 69-102.
[9] L. TARTAR, *Herriot Watt Symposium*, IV, R. J. KNOPS éd., *Research Notes in Math.*, 39, Pitman, 1979, p. 136-212.

U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique,
Université de Bordeaux-I,
Laboratoire associé au C.N.R.S. 040226,
351, *Cours de la Libération*, 33405 *Talence Cedex.*