ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Problème de Cauchy pour des systèmes de Klein-Gordon-Schroedinger*. Note (*) de **Alain Bachelot**, présentée par Jacques-Louis Lions.

On résout le problème de Cauchy global pour des systèmes d'équations de Schroedinger et de Klein-Gordon sans conservation d'énergie et avec des données initiales peu régulières.

MATHEMATICAL ANALYSIS. — The Cauchy Problem for Systems of Schroedinger and Klein-Gordon Equations.

We resolve the global Cauchy problem for systems of Schroedinger and Klein-Gordon equations, without conserved energy and for not very regular data.

En mécanique quantique on est amené à considérer des systèmes formés par une équation de Schroedinger couplée avec une équation de Klein-Gordon (S−KG) ou avec une autre équation de Schroedinger (S−S) :

$$(\mathrm{S-KG})\qquad \begin{cases} i\,\psi_t+\Delta\psi=\mathrm{F}(\psi,\,\varphi); \\ \varphi_{tt}-\Delta\varphi+m^2\,\varphi=\mathrm{G}(\psi,\,\varphi); \qquad 0<m; \end{cases}$$

$$(\mathrm{S-S})\qquad \begin{cases} i\,\psi_t+\Delta\psi=\mathrm{F}(\psi,\,\varphi); \\ i\,\varphi_t+\Delta\varphi=\mathrm{G}(\psi,\,\varphi). \end{cases}$$

Dans le cas du système (S−KG) avec interaction de Yukawa, $\mathrm{F}(\psi,\,\varphi)=g\,\psi\varphi$, $g\in\mathbb{R}$, $\mathrm{G}(\psi,\,\varphi)=-g\,|\,\psi\,|^2$, Baillon et Chadam [2], en utilisant la conservation de l'énergie, ont établi l'existence de solutions globales dans $\mathrm{C}^0(\mathbb{R},\,\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^3))$ pour $\psi(0,\,.)$ et $\varphi(0,\,.)$ dans $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^3)$ et $\varphi_t(0,\,.)$ dans $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^3)$. Holder [3] a résolu le problème de Cauchy global dans $\mathrm{C}^0\,(\mathbb{R},\,\mathrm{H}^2\,(\mathbb{R}^3))$ pour le système (S−S) avec une classe d'interaction comprenant notamment $\mathrm{F}(\psi,\,\varphi)=\psi\,|\,\varphi\,|$ et $\mathrm{G}(\psi,\,\varphi)=\varphi\,|\,\psi\,|$ ou $\varphi\,\sin|\,\psi\,|$ et des données initiales dans $\mathrm{H}^2(\mathbb{R}^3)$. On montre ici l'existence et l'unicité de solutions globales faibles dans $\mathrm{C}^0(\mathbb{R},\,\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)\cap\mathrm{L}^4(\mathbb{R}^3))$ pour (S−KG) et S−S) avec des couplages généralisant les cas ci-dessus, en particulier on ne fera pas d'hypothèse de conservation d'énergie ou de données de Cauchy petites. On utilisera principalement la conservation de la charge de ψ et les estimations $\mathrm{L}^{4/3}-\mathrm{L}^4$ des propagateurs $\mathrm{S}(t)$ et $\mathrm{R}(t)$ associés respectivement à l'équation de Schroedinger et à l'équation de Klein-Gordon [4] que nous rappelons :

$$(1)\qquad |\,\mathrm{S}(t)\,u\,|_4\leqq\mathrm{C}\,|\,t\,|^{-3/4}\,|\,u\,|_{4/3};\ |\,\mathrm{R}(t)\,u\,|_4\leqq\mathrm{C}\,|\,t\,|^{-1/2}\,|\,u\,|_{4/3},$$

où :

$$|\,.\,|_p=|\,.\,|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Dans les exemples précédents on remarque d'une part que l'interaction est lipschitzienne et d'autre part que $\mathrm{F}(\psi,\,\varphi)$ est linéaire en ψ à coefficient réel, si bien que la charge de ψ est conservée, et que F et G satisfont $|\,\mathrm{F}(\psi,\,\varphi)\,|_{4/3}\leqq\mathrm{C}\,|\,\psi\,|_2\,|\,\varphi\,|_4$; $|\,\mathrm{G}(\psi,\,\varphi)\,|_{4/3}\leqq\mathrm{C}(\,|\,\psi\,|_2\,|\,\varphi\,|_4+|\,\psi\,|_2\,.\,|\,\psi\,|_4)$ si bien qu'avec les estimations (1) on peut obtenir des estimations *a priori* de ψ et φ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)\cap\mathrm{L}^4(\mathbb{R}^3)$. Comme généralisation de ces exemples on traitera le cas où F et G satisfont l'hypothèse (H) :

$$(\mathrm{H})\qquad \begin{cases} \mathrm{F}(\psi,\,\varphi)=\psi\,f(\varphi);\ \mathrm{G}(\psi,\,\varphi)=g_0(\psi)\,g_1(\varphi)+\psi\,h(\psi), \\ \text{où } f,\,g_0,\,g_1,\,h \text{ sont des applications uniformément lipschitziennes de } \mathbb{C} \text{ dans } \mathbb{C}, \text{ nulles} \\ \text{en } 0,\,f \text{ étant réelle.} \end{cases}$$

On obtient le résultat d'existence et d'unicité suivant :

THÉORÈME 1. — *Soient* ψ_0 *et* φ_0 *des solutions respectivement de l'équation de Schroedinger et de l'équation de Klein-Gordon. On suppose que* ψ_0 *et* φ_0 *appartiennent à* $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ *et que* F *et* G *vérifient* (H). *Alors il existe une unique solution* (ψ, φ) *de* (S–KG), ψ *et* φ *appartenant à* $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ *et vérifiant :*

$$\psi(0, .) = \psi_0(0, .); \qquad \varphi(0, .) = \varphi_0(0, .); \qquad \varphi_t(0, .) = \varphi_{0t}(0, .).$$

Si, de plus ψ_0 *et* φ_0 *appartiennent à* $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$ *et si* f, g_0, g_1, h *sont* C^1, *alors* ψ *et* φ *appartiennent à* $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$.

Nous esquissons la démonstration de l'existence; on résout la suite de problèmes de Cauchy (P_n) suivante :

$$(P_n)_{n \geq 1} \quad \left\{ \begin{array}{c} i\psi_t^n + \Delta\psi^n = \psi^n f(\varphi^{n-1}), \\ \varphi_{tt}^n - \Delta\varphi^n + m^2 \varphi^n = g_0(\psi^{n-1}) g_1(\varphi^{n-1}) + \psi^{n-1} h(\psi^{n-1}), \\ \psi^n(0, .) = \psi_0(0, .), \\ \varphi_n(0, .) = \varphi_0(0, .); \qquad \varphi_t^n(0, .) = \varphi_{0t}(0, .) \end{array} \right.$$

et :

$$\psi^0 = \psi_0, \qquad \varphi^0 = \varphi_0.$$

Pour cela on remarque que si $V(.)$, à valeur réelle, appartient à $C^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3))$ et si $A(t) = -\Delta + V(t)$ alors il existe un propagateur $U(t, s)$ tel que pour tout ψ_s dans $H^2(\mathbb{R}^3)$ on ait :

$$U(t, s)\psi_s \in C^0(\mathbb{R}_t, H^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^1(\mathbb{R}_t, H^1(\mathbb{R}^3)),$$

$$\frac{d}{dt} U(t, s)\psi_s = \frac{1}{i} A(t) U(t, s)\psi_s,$$

$$U(s, s)\psi_s = \psi_s$$

(*voir* par exemple [5]). On en déduit par régularisation que si $\varphi(.)$ appartient à $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ et si ψ_0 est une solution de l'équation de Schroedinger dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$ et si f est une application uniformément lipschitzienne de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ nulle en 0 le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} i\psi_t + \Delta\psi = \psi f(\varphi), \\ \psi(0, .) = \psi_0(0, .), \end{array} \right.$$

admet une unique solution dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3) \cap L^4(\mathbb{R}^3))$. Les problèmes (P_n) sont donc bien posés dans cet espace.

On remarque ensuite que la charge de ψ^n est conservée :

$$|\psi^n(t)|_2 = |\psi^n(0)|$$

On applique alors les estimations (1) aux équations intégrales satisfaites par ψ^n et φ^n :

$$\psi^n(t)=\psi_0(t)+\int_0^t S(t-s)[\psi^n(s)f(\varphi^{n-1}(s))]\,ds,$$

$$\varphi^n(t)=\varphi_0(t)+\int_0^t R(t-s)[g_0(\psi^{n-1}(s))g_1(\varphi^{n-1}(s))+\psi^{n-1}(s)h(\psi^{n-1}(s))]\,ds.$$

On en déduit directement à l'aide du lemme de Gronwall la convergence de ψ^n et φ^n dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3)\cap L^4(\mathbb{R}^3))$ vers la solution de (S−KG). Dans le cas où f, g_0, g_1, h sont C^1 et où $\psi_0, \varphi_0\in C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)\cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$, ψ^n et φ^n convergent dans cet espace.

Les propagateurs $R(t)$ et $S(t)$ possédant des estimations $L^{4/3}-L^4$ semblables on montre de façon analogue l'existence, l'unicité et la régularité des solutions pour (S−S).

THÉORÈME 2. — *Soient ψ_0 et φ_0 deux solutions de l'équation de Schroedinger dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3)\cap L^4(\mathbb{R}^3)$. On suppose que* F *et* G *vérifient* (H). *Alors il existe une unique solution (ψ, φ) de* (S−S), *ψ et φ appartenant à $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3)\cap L^4(\mathbb{R}^3))$ et vérifiant $\psi(0, .)=\psi_0(0, .)$, $\varphi(0, .)=\varphi_0(0, .)$. Si, de plus, f, g_0, g_1, h sont C^1 et si ψ_0 et φ_0 appartiennent à $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)\cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$ alors ψ et φ appartiennent à $C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)\cap W^{1,4}(\mathbb{R}^3))$.*

Dans le cas de l'interaction de Yukawa pour (S−KG) on peut estimer $|\nabla\psi^n(t)|_2$ à partir de $|\psi^n(t)|_4$, $|\varphi^{n-1}(t)|_2$, $|\varphi_t^{n-1}(t)|_2$ sans avoir besoin de contrôler simultanément $|\nabla\psi^n(t)|_4$ grâce à la relation :

$$\frac{d}{dt}\left(|\nabla\psi^n(t)|_2^2+g\int|\psi^n(t)|^2\varphi^{n-1}(t)\,dx\right)=g\int|\psi^n(t)|^2\varphi_t^{n-1}(t)\,dx.$$

On peut alors améliorer le théorème 1 [1].

THÉORÈME 3. — *Soient ψ_0 et φ_0 dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ et φ_1 dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, φ_0 et φ_1 étant réelles. Alors il existe une unique solution (ψ, φ) de* (S−KG) *avec interaction de Yukawa satisfaisant :*

$$\psi,\ \varphi\in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3));\qquad \varphi_t\in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3)),$$
$$\psi(0, .)=\psi_0(.);\qquad \varphi(0, .)=\varphi_0(.);\qquad \varphi_t(0, .)=\varphi_1(.).$$

De plus, ψ et φ vérifient :

$$\psi\in C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3)),$$
$$\varphi\in C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}^3))\cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3)),$$
$$|\nabla\psi(t)|_2^2+\frac{1}{2}(|\nabla\varphi(t)|_2^2+m^2|\varphi(t)|_2^2+|\varphi_t(t)|_2^2)+g\int|\psi(t)|^2\varphi(t)\,dx=\textit{constante}.$$

Remarque. — On peut aussi établir ce théorème en régularisant les données initiales, en utilisant le théorème d'existence de [2] et en montrant la convergence de ces solutions à l'aide de la conservation de l'énergie et des estimations (1).

(*) Remise le 7 mars 1983.

[1] A. Bachelot, *Rapport interne n°* 8113, Laboratoire associé n° 226, Université de Bordeaux-I.

[2] J. B. Baillon et J. M. Chadam, *In Contemporary Developments in continuum Mechanics;* G. M. de la Penha et L. A. Medeiros, éd., North-Holland Publishing Company, 1978.

[3] E. J. Holder, *Indiana Univ. Math. J.*, 30, 1981, p. 653-673.

[4] B. Marshall, W. Strauss et S. Wainger, *J. Math. pures et appl.*, 59, 1980, p. 417-440.

[5] M. Reed et B. Simon, *Fourier Analysis Self-Adjointness*, Academic Press, New York, 1975.

École Normale Supérieure Souissi, Département de Mathématiques,
B.P. n° 773, *Rabat, Maroc;*
Université de Bordeaux-I, U.E.R. de Math. et Info.,
Laboratoire associé au C.N.R.S., n° 226,
351, *Cours de la Libération* 33405 *Talence Cedex.*