ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Problème inverse de diffusion non linéaire*. Note (*) de **Alain Bachelot,** présentée par Jacques-Louis Lions.

Certaines solutions de l'équation de Klein-Gordon convergent fortement dans $L^4(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3)$ vers la solution de l'équation des ondes; il suit que l'opérateur de diffusion associé à la perturbation $-q(x)u^3$ détermine q.

Some solutions of the Klein-Gordon equation converge strongly in $L^4(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3)$ to the solution of the wave equation; it follows that the Scattering operator for the interacting $-q(x)u^3$ determines q.

Morawetz et Strauss [1] ont montré que l'opérateur de diffusion relatif à l'équation de Klein-Gordon (KG) :

$$\text{(KG)}\qquad u_{tt}-\Delta_x u+m^2 u=0;\qquad 0<m;\quad x\in\mathbb{R}^3$$

et à l'équation perturbée :

$$u_{tt}-\Delta_x u+m^2 u=-gu^3:\qquad 0<g,$$

détermine la constante g.

Pour toute fonction positive q, élément de $W^{2,\infty}(\mathbb{R}_x^3)\cap C^2(\mathbb{R}_x^3)$ on établit en utilisant [2] qu'il existe $\rho>0$ tel que l'opérateur de diffusion S relatif à (KG) et à l'équation perturbée :

$$(1)\qquad u_{tt}-\Delta_x u+m^2 u=-qu^3,$$

est défini pour toute solution u_- de (KG) vérifiant :

$$(2)\qquad \|u_-\|_{\text{Scat}}<\rho,$$

où :

$$\|u\|_{\text{Scat}}^2=\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t)\|_e^2+\sup_{t\in\mathbb{R}}(1+|t|)^3\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^3)}^2,$$

avec :

$$\|u(t)\|_e^2=\|u(t)\|_{W^{2,2}(\mathbb{R}_x^3)}^2+\|u_t(t)\|_{W^{1,2}(\mathbb{R}_x^3)}^2$$

et :

$$\|u\|_{W^{s,2}(\mathbb{R}_x^3)}=|(m^2+|\xi|^2)^{s/2}\,\hat{u}(\xi)|_{L^2(\mathbb{R}_\xi^3)}.$$

Il existe donc pour un tel u_-, une unique solution u_+ de (KG), $u_+=\mathrm{S}u_-$ et une unique solution u de (1), $u=\mathscr{W}_-u_-$ vérifiant :

$$(3)\qquad \|u(\pm t)-u_\pm(\pm t)\|_e\to 0,\qquad t\to+\infty.$$

De plus, on a l'estimation :

$$(4)\qquad \|u-u_-\|_{\text{Scat}}=\mathrm{O}(\|u_-\|_{\text{Scat}}^2).$$

On définit comme dans [1] le Wronskien de deux éléments de $C^1(\mathbb{R}_t, L^2(\mathbb{R}_x^3))$ en posant :

$$\mathrm{W}(u(t), v(t))=\int[u(t,x)\,v_t(t,x)-u_t(t,x)\,v(t,x)]\,dx.$$

En dérivant puis intégrant par rapport à t cette expression de $-\mathrm{T}$ à $+\mathrm{T}$ pour u et v solutions de (1) images par $\mathscr{W}_-$ de u_- et v_- solutions de (KG) vérifiant (2) on obtient :

$$\mathrm{W}(u(\mathrm{T}), v(\mathrm{T}))-\mathrm{W}(u(-\mathrm{T}), v(-\mathrm{T}))=\int_{-\mathrm{T}}^{+\mathrm{T}}\int q(u^3v-uv^3)\,dt\,dx.$$

On fait tendre T vers $+\infty$ et de (3) on déduit :

$$W(S(u_-), S(v_-)) - W(u_-, v_-) = \iint q(u^3 v - uv^3)\,dt\,dx. \tag{5}$$

On choisit $\varepsilon > 0$, $u_- = \varepsilon\varphi$, $v_- = \varepsilon^2\varphi$ où φ est une solution de (KG) à données initiales dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}_x^3)$ et on évalue l'intégrale dans (5) à l'aide de (4) :

$$W(S(\varepsilon\varphi), S(\varepsilon^2\varphi)) = \varepsilon^5 \iint q\varphi^4\,dt\,dx + O(\varepsilon^6).$$

On a donc la :

PROPOSITION. — *Pour toute solution φ de (KG) à données initiales dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}_x^3)$ on a la formule :*

$$\iint q\varphi^4\,dt\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-5}\,W(S(\varepsilon\varphi), S(\varepsilon^2\varphi)).$$

On fixe à présent $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $\lambda > 0$, g non nul dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}_x^3)$ et on note φ_λ la solution de (KG) vérifiant $\varphi_\lambda(0, x) = 0$, $\varphi_{\lambda_t}(0, x) = \lambda g(\lambda(x - x_0))$. Par le changement de variables $t' = \lambda t$, $x' = \lambda(x - x_0)$, $u_\lambda(t', x') = \varphi_\lambda(t, x)$ on obtient :

$$\iint q\left(x_0 + \frac{x'}{\lambda}\right) u_\lambda^4(t', x')\,dt'\,dx' = \lambda^4 \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-5}\,W(S(\varepsilon\varphi_\lambda), S(\varepsilon^2\varphi_\lambda))$$

et u_λ est solution de :

$$u_{t't'} - \Delta_{x'} u + \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 u = 0; \qquad u_\lambda(0, x') = 0; \qquad u_{\lambda t'}(0, x') = g(x').$$

Il suffit alors de montrer que u_λ converge fortement dans $L^4(\mathbb{R}_{t'} \times \mathbb{R}_{x'}^3)$ vers la solution de l'équation des ondes avec mêmes données initiales quand $\lambda \to +\infty$ pour obtenir le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — *Soit q une fonction positive élément de $W^{2,\infty}(\mathbb{R}_x^3) \cap C^2(\mathbb{R}_x^3)$. Alors q est caractérisée par l'opérateur de diffusion associé à* (KG) *et à* (1). *Plus précisément, étant donnés $x_0 \in \mathbb{R}^3$, $\lambda > 0$ et g non nul dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}_x^3)$ vérifiant :*

$$\hat{g} \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_\xi^3), \quad 0 \notin \operatorname{supp} \hat{g}, \tag{6}$$

soit φ_λ la solution de (KG) *avec $\varphi_\lambda(0, x) = 0$, $\varphi_{\lambda,t}(0, x) = \lambda g(\lambda(x - x_0))$ et soit u la solution de $u_{tt} - \Delta_x u = 0$ avec $u(0, x) = 0$, $u_t(0, x) = g(x)$. Alors la valeur $q(x_0)$ est donnée par :*

$$q(x_0) = \left[\iint u^4(t, x)\,dt\,dx\right]^{-1} \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^4 \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-5}\,W(S(\varepsilon\varphi_\lambda), S(\varepsilon^2\varphi_\lambda)).$$

Pour établir ce résultat notons respectivement $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}^{-1}$ la transformée de Fourier et la transformée réciproque, par rapport à toutes les variables. Si u_m est la solution de (KG) avec :

$$u_m(0, x) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_m}{\partial t}(0, x) = g(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_x^3)$$

on a :

$$\mathscr{F} u_m(\tau, \xi) = \frac{i}{2}\operatorname{sgn}(\tau)\,\hat{g}(\xi)\,d\mu_m,$$

où $\operatorname{sgn}(\tau)$ désigne le signe de τ et $d\mu_m$ la distribution dans $\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}^3_\xi$ portée par la surface quadratique $\{|\xi|^2+m^2=\tau^2\}$ et définie par :

$$\forall \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}^3_\xi),$$

$$\langle d\mu_m, \varphi\rangle = \int [\varphi((m^2+|\xi|^2)^{1/2}, \xi)+\varphi(-(m^2+|\xi|^2)^{1/2}, \xi)](m^2+|\xi|^2)^{-1/2}\, d\xi,$$

u_m s'écrit donc :

$$u_m = \mathscr{F}^{-1}(\mathrm{F}\, d\mu_m),$$

où :

$$\mathrm{F}(\tau, \xi)=\frac{i}{2}\operatorname{sgn}(\tau)\,\hat{g}(\xi).$$

Strichartz [3] montre en utilisant l'interpolation complexe que si $u_m(0, x)\in \mathrm{W}^{1/2, 2}(\mathbb{R}^3_x)$ et $u_{m,t}(0, x)\in \mathrm{W}^{-1/2, 2}(\mathbb{R}^3_x)$ alors $u_m \in \mathrm{L}^4(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x)$. En changeant d'espaces d'interpolation et avec $u_m(0, x)=0$, $u_{m,t}(0, x)=g(x)$, g vérifiant (6) nous établissons le :

THÉORÈME 2. — *Sous la condition* (6) *la solution* u_m *de* (KG) *converge fortement quand* $m \to 0$ *dans* $\mathrm{L}^4(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x)$ *vers la solution de l'équation des ondes ayant mêmes données initiales.*

Démonstration. — Notons que sous la condition (6) il existe $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_\tau \times \mathbb{R}^3_\xi \setminus 0)$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x)$ tels que pour $0 \leqq m \leqq \mathrm{M}$ u_m s'écrit :

$$u_m = \varphi \star \mathscr{F}^{-1}(\chi\, d\mu_m).$$

De manière générale soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$, $n \geqq 3$, de signature (α, β), $1 \leqq \alpha$, β et $\alpha+\beta=n$; soit $\chi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n \setminus 0)$; pour $r \geqq 0$, soit $d\mu_r$ la distribution portée par la surface $\{\mathrm{Q}=r\}$ et définie par :

$$\forall \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n), \quad \langle d\mu_r, \varphi\rangle = \int_{\mathrm{Q}=r} \varphi(x)\frac{dx_1 \ldots dx_{n-1}}{|\partial \mathrm{Q}/\partial x_n|}.$$

Soit T_r l'opérateur donné par :

$$\mathrm{T}_r\, \varphi = \varphi \star \mathscr{F}[\chi(d\mu_r - d\mu_0)].$$

Le théorème 2 apparaît alors comme une conséquence du résultat plus général suivant :

PROPOSITION. — T_r *est un opérateur borné de* $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *vers* $\mathrm{L}^{2n/n-2}(\mathbb{R}^n)$ *dont la norme tend vers zéro quand* $r \to 0$.

Démonstration. — On construit la famille d'opérateur $\mathrm{T}_{r;z}$ en posant :

$$\mathrm{T}_{r;z}\, \varphi = \varphi \star \mathscr{F}\{\gamma(z)\chi[(\mathrm{Q}-r)^z_+ - (\mathrm{Q})^z_+]\},$$

où $\gamma(z)$ est choisi comme dans [3] :

$$\gamma(z)=[\Gamma(z+1)]^{-1}\left(z+\frac{n}{2}\right)\sin\left[\pi\left(z+\frac{n}{2}\right)\right] \quad \text{si} \quad n \text{ impair},$$

$$\gamma(z)=[\Gamma(z+1)]^{-1}\left(z+\frac{n}{2}\right)\sin\left[\pi\left(z+\frac{n}{2}\right)\right](z+1)^{-1} \quad \text{si} \quad n \text{ pair}.$$

Grâce aux zéros de γ, $T_{r;z}$ est une famille analytique d'opérateurs; en particulier, -1 étant zéro simple de γ et $(Q-r)_+^z$ étant une fonction méromorphe de z à valeur dans les distributions, ayant un pôle simple en -1 avec $d\mu_r$ comme résidu on a :

$$T_{r;-1}=c.T_r;\qquad c\neq 0.$$

On vérifie de plus que $T_{r;z}$ satisfait à la condition de croissance admissible de Stein [4]. On interpole entre $\operatorname{Re} z=0$ et $\operatorname{Re} z=-n/2$. D'une part, on a :

$$\| T_{r;-(n/2)+iy}(\varphi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqq \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|\mathscr{F}\chi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \left|\gamma\left(-\frac{n}{2}+iy\right)\right| \times \|\mathscr{F}[(Q-r)_+^{-(n/2)+iy}-(Q)_+^{-(n/2)+iy}]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}.$$

D'un calcul explicite il suit alors que :

$$(7)\qquad \operatorname*{Sup}_{r>0} \operatorname{Log}\| T_{r;-(n/2)+iy}\|_{\mathscr{L}(L^1(\mathbb{R}^n),L^\infty(\mathbb{R}^n))} \leqq a+b\,|y|.$$

D'autre part :

$$\| T_{r;iy}\,\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leqq \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,|\gamma(iy)|\,.\,\|\chi[(Q-r)_+^{iy}-(Q)_+^{iy}]\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

On en déduit que :

$$(8)\qquad \operatorname*{Sup}_{0\leqq r\leqq 1} \operatorname{Log}\| T_{r;iy}\|_{\mathscr{L}(L^1(\mathbb{R}^n),L^2(\mathbb{R}^n))} \leqq a'+b'\,|y|$$

et :

$$(9)\qquad \operatorname{Log}\| T_{r;iy}\|_{\mathscr{L}(L^1(\mathbb{R}^n),L^2(\mathbb{R}^n))} \to -\infty \quad \text{si}\quad r\to 0.$$

On peut alors appliquer le théorème de Stein [4] qui assure que $T_{r;-1}$ est un opérateur borné de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $L^{2n/n-2}(\mathbb{R}^n)$ dont la norme vérifie :

$$(10)\qquad \operatorname{Log}\| T_{r;-1}\|_{\mathscr{L}(L^1(\mathbb{R}^n),L^{2n/n-2}(\mathbb{R}^n))} \leqq I_1+I_2,$$

où :

$$I_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega\left(1-\frac{2}{n},\,y\right)\operatorname{Log}\| T_{r;iy}\|_{\mathscr{L}(L^1(\mathbb{R}^n),L^2(\mathbb{R}^n))}\,dy,$$

$$I_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega\left(\frac{2}{n},\,y\right)\operatorname{Log}\| T_{r;-(n/2)+iy}\|_{\mathscr{L}(L^1(\mathbb{R}^n),L^\infty(\mathbb{R}^n))}\,dy$$

et :

$$\omega(t,\,y)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}(\pi t/2)[\operatorname{tg}^2(\pi t/2)+\operatorname{th}^2(\pi y/2)]^{-1}\operatorname{ch}^{-2}(\pi y/2).$$

Grâce à (7) I_2 reste borné quand $r\to 0$ et grâce à (8), (9) et au lemme de Fatou, $I_1\to-\infty$ quand $r\to 0$; donc $\| T_{r;-1}\|_{\mathscr{L}(L^1(\mathbb{R}^n),L^{2n/n-2}(\mathbb{R}^n))}\to 0$ $r\to 0$ et la proposition est démontrée.

(*) Remise le 29 juin 1981.

[1] C. S. MORAWETZ et W. A. STRAUSS, *Comm. Pure Appl. Math.*, 26, 1973, p. 47-54.
[2] M. REED et B. SIMON, *Scattering Theory*, Academic Press, New York, 1979.
[3] S. ROBERT et STRICHARTZ, *Duke Math. J.* 44, n° 3, 1977, p. 705-714.
[4] E. M. STEIN, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 83, 1956, p. 482-492.

Université de Bordeaux-I, U.E.R. de Mathématiques et Informatique, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.