

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ALAIN BACHELOT

AGNÈS MOTET-BACHELOT

Les résonances d'un trou noir de Schwarzschild

Annales de l'I. H. P., section A, tome 59, n° 1 (1993), p. 3-68

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1993__59_1_3_0

© Gauthier-Villars, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Les résonances d'un trou noir de Schwarzschild

par

Alain BACHELOT et Agnès MOTET-BACHELOT

Département de Mathématiques appliquées,
Unité associée au C.N.R.S. n° 226, Université Bordeaux-I,
351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France

RÉSUMÉ. — Ce travail est consacré à l'étude théorique et numérique des fréquences de résonance associées à la diffraction d'ondes scalaires, électromagnétiques ou gravitationnelles, par un trou noir sphérique. On adopte une approche dépendant du temps: construction des opérateurs d'onde pour l'équation hyperbolique de Regge-Wheeler; complétude asymptotique; représentations spectrales entrantes et sortantes; prolongement méromorphe de la matrice d'Heisenberg; approximation par amortissement et troncature des potentiels et interprétation du semi groupe $Z(t)$ dans le cadre du Paradigme de la Membrane. On développe une nouvelle procédure numérique de calcul des résonances par analyse spectrale de l'onde transitoire diffractée, basée sur l'algorithme de Prony.

ABSTRACT. — This paper is devoted to the theoretical and computational investigations of the scattering frequencies of scalar, electromagnetic, gravitational waves around a spherical Black Hole. We adopt a time dependent approach: construction of wave operators for the hyperbolic Regge-Wheeler equation; asymptotic completeness; outgoing and incoming spectral representations; meromorphic continuation of the Heisenberg matrix; approximation by dumping and cut-off of the potentials and interpretation of the semi group $Z(t)$ in the framework of the Membrane Paradigme. We develop a new procedure for the computation of the resonances by the spectral analysis of the transient scattered wave, based on Prony's algorithm.

I. INTRODUCTION

L'objet de ce travail est la construction d'un cadre mathématique rigoureux pour la notion de résonances d'un trou noir, incluant les approches temporelles et stationnaires du problème de diffraction, dont on établit l'équivalence. Nous proposons de plus une nouvelle méthode de calcul de ces fréquences, basée sur l'approximation par troncature du potentiel d'interaction et l'algorithme de Prony [33].

Le concept de résonances d'un trou noir est lié au problème de la stabilité de la métrique de Schwarzschild vis-à-vis de perturbations scalaires, électromagnétiques, gravitationnelles... Après linéarisation autour de la solution de Schwarzschild, on montre formellement qu'un champ sans masse, de spin s , et de petite amplitude, est caractérisé par une fonction d'onde scalaire Ψ , solution de l'équation hyperbolique :

$$\partial_t^2 \Psi - \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left\{ \partial_r \left[\left(1 - \frac{1}{r}\right) \partial_r \Psi \right] + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} \Psi + \frac{s^2 - 1}{r^3} \Psi \right\} = 0,$$

$$\Psi = \Psi(t, r, \omega), \quad t \in \mathbb{R}, \quad r \in]1, \infty[, \quad \omega \in S^2,$$

où Δ_{S^2} est l'opérateur de Laplace Beltrami sur la 2-sphère S^2 (cf. par exemple [5]).

Une décomposition en harmoniques sphériques ramène le problème à l'étude d'une famille de champs scalaires $\Phi_{l,s}$, $l \in \mathbb{N}$, obéissant à l'équation de Regge-Wheeler :

$$\partial_t^2 \Phi - \partial_x^2 \Phi + V(x) \Phi = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{I.1})$$

où V est le potentiel relatif au multipôle d'indice entier $l \geq 0$:

$$V(x) = V_{l,s}(x) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1-s^2}{r^3} \right] \quad (\text{I.2})$$

et x et r sont reliés par la relation :

$$x = r + \text{Log}(r-1), \quad 1 < r < +\infty. \quad (\text{I.3})$$

Une première approche, en approximation linéaire, du problème de la stabilité de la solution de Schwarzschild consiste donc à étudier le comportement asymptotique des solutions Φ de (I.1) quand $t \rightarrow \pm\infty$, $r \rightarrow 1$, et $t \rightarrow \pm\infty$, $r \rightarrow \infty$. En particulier, on espère décrire ce comportement par un ensemble discret de fréquences, dites de résonances, jouant un rôle dans les problèmes définis sur un ouvert non borné, analogue à celui des valeurs propres dans le cas d'un ouvert borné.

Plus précisément, un nombre complexe σ , $\text{Im} \sigma < 0$, $\text{Re} \sigma \neq 0$, est une *fréquence de résonance* s'il existe une solution Φ de (I.1) de la forme :

$$\Phi(t, x) = e^{-i\sigma t} u(x), \quad (\text{I.4})$$

où u est solution de l'équation de Schrödinger

$$-u'' + V(x)u = \sigma^2 u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (\text{I. 5})$$

satisfaisant la condition de radiation sortante de Sommerfeld

$$u(x) \approx C_{\pm} e^{\pm i \sigma x}, \quad x \rightarrow \pm \infty. \quad (\text{I. 6})$$

Pour donner un sens précis à (I.6) quand le potentiel V est à courte portée, *i.e.* $V \in L^1(\mathbb{R})$, mais n'est pas à support compact, on introduit pour $\sigma \in \mathbb{C}$, $\sigma \neq 0$, $\text{Im } \sigma \geq 0$, les fonctions de Jost $f_{\pm}(x, \sigma)$ solutions de (I.5) vérifiant

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^{\mp i \sigma x} f_{\pm}(x, \sigma) = 1. \quad (\text{I. 7})$$

On note $W(\sigma)$ le Wronskien de f_+ et f_- :

$$W(\sigma) = f_-(x, \sigma) \frac{df_+(x, \sigma)}{dx} - f_+(x, \sigma) \frac{df_-(x, \sigma)}{dx}. \quad (\text{I. 8})$$

L'équation

$$W(\sigma) = 0, \quad \sigma \in \mathbb{C}, \quad (\text{I. 9})$$

n'a pas de solution réelle non nulle et définit alors trois sortes de fréquences σ :

- les *valeurs propres* associées aux états bornés (*i.e.* dans $L^2(\mathbb{R}_x)$) de l'équation de Schrödinger (I.5) si $\text{Im } \sigma > 0$;
- les *états antibornés* si $\text{Im } \sigma < 0$, $\text{Re } \sigma = 0$;
- les *résonances* si $\text{Im } \sigma < 0$, $\text{Re } \sigma \neq 0$.

La fréquence nulle est dite *niveau virtuel* si l'équation (I.5) admet une solution non nulle dans $L^\infty(\mathbb{R}_x)$ pour $\sigma = 0$. Les Astrophysiciens ont coutume d'appeler *fréquences propres du trou noir* les résonances et les états antibornés pour les potentiels $V_{l,s}$, $l \geq s$, et *mode quasi normal* la fonction $f_{\pm}(x, \sigma)$ correspondante.

Le problème fondamental de l'approche stationnaire est donc de justifier le prolongement analytique de $f_{\pm}(x, \sigma)$ pour $\text{Im } \sigma < 0$.

Quand le potentiel V est à support compact, ce prolongement analytique est immédiat et la théorie de Lax et Phillips [20] permet de caractériser élégamment les résonances et les états antibornés σ_j par une décomposition spectrale des solutions Φ de (I.1) :

$$\Phi(t, x) \approx \sum_{j=0}^{\infty} C_j e^{-i \sigma_j t} f_+(x, \sigma_j), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{I. 10})$$

La relation (I.10) est la base de la méthode numérique de Prony [33] appliquée à l'équation des ondes acoustiques par Majda, Strauss et Wei [24].

Notre présente contribution consiste à développer la théorie complète de la diffraction pour l'équation (I. 1) : existence et complétude asymptotique des opérateurs d'onde; représentations spectrales rentrantes et sortantes; prolongement méromorphe de la matrice d'Heisenberg; calcul numérique des fréquences propres du trou noir par la méthode de Prony en justifiant l'approximation par troncature des potentiels $V_{l,s}$.

La partie II est consacrée à l'approche dépendant du temps du problème direct de diffraction. L'étude des équations hyperboliques en métrique de Schwarzschild a été initialisée par J. Dimock [12] qui construit les opérateurs d'onde pour le D'Alembertien en tirant partie du caractère répulsif et de courte portée des potentiels $V_{l,0}$; la diffraction du champ électromagnétique est analysée en détail dans [2]; à la différence du cas scalaire, le générateur du propagateur de Maxwell admet un noyau non nul, le second espace de cohomologie, du fait de la trivialité de $V_{0,1}$; à partir du spin 2, les potentiels $V_{l,s}$ ne sont plus positifs pour $l < s$ (modes *non radiatifs*); il peut alors exister un nombre fini d'états bornés, donc de solutions d'énergie finie de la forme (I. 4) exponentiellement croissantes; ce fait et les difficultés techniques propres à la dimension 1 (les espaces de Hilbert intervenant contiennent les constantes et le premier espace de Beppo Levi sur \mathbb{R} n'est pas un espace de distributions) rendent plus délicate la construction du cadre fonctionnel; Nous suivons l'approche de R. Phillips [31] qui traite de l'équation (I. 1) sous l'hypothèse restrictive

$$|V(x)| \leq C(1+|x|)^{-2-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon. \quad (\text{I. 11})$$

Cette condition n'est pas satisfaite pour les potentiels $V_{l,s}$ qui vérifient seulement

$$|V(x)| \leq C(1+|x|)^{-2}. \quad (\text{I. 12})$$

Nous montrons qu'il est possible de relaxer l'hypothèse (I. 11) de Phillips, essentiellement en ne la faisant porter que sur la partie négative du potentiel, et nous établissons l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'onde pour les potentiels V satisfaisant

$$\left. \begin{aligned} V(x) &= V_+(x) - V_-(x), \quad V_{\pm} \geq 0, \\ V_+(x) &\leq C(1+|x|)^{-1-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon, \\ V_-(x) &\leq C(1+|x|)^{-2-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I. 13})$$

Nous pouvons ainsi considérer les potentiels d'interaction pour les trous sphériques généraux de type (De Sitter)-Reissner-Nordström décrits par la métrique

$$ds^2 = \alpha^2 dt^2 - \alpha^{-2} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \\ \alpha = (1 - 2M r^{-1} + Q^2 r^{-2} - \Lambda r^2/3)^{1/2}, \quad Q \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \Lambda.$$

Dans la partie III nous faisons le lien entre l'approche dépendant du temps et l'approche stationnaire en construisant les représentations spectrales rentrantes et sortantes au sens de Lax et Phillips du propagateur de

l'équation (I.1). Sous l'hypothèse (I.13), l'opérateur de diffraction est unitairement équivalent à la classique matrice d'Heisenberg associée à l'équation de Schrödinger (I.5) dont les pôles dans $\mathbb{C}^- \setminus i\mathbb{R}^-$ sont les résonances.

On étudie le prolongement analytique de $f_{\pm}(x, \sigma)$ pour $\text{Im } \sigma < 0$ dans la partie IV. Les potentiels $V_{l,s}$ n'étant ni à support compact, ni à décroissance exponentielle, nous relierons les propriétés d'analyticité de $W(\sigma)$ à celles de $V_{l,s}$, selon la méthode des rotations de contour employée pour les potentiels de Yukawa. On est ainsi amené à considérer le problème du prolongement analytique de la réciproque de la transformation de Wheeler (I.3)

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow r = r(x) \in]1, +\infty[, \quad \text{où } x = r + \text{Log}(r-1). \quad (\text{I.14})$$

Cette question a été abordée par Hartle et Wilkins dans [16], sans que le domaine d'holomorphie de l'application $x \rightarrow r$ soit précisément défini : la détermination de la surface de Riemann associée reste à faire. Il nous suffit ici de démontrer que l'application (I.14) définie sur \mathbb{R} admet un prolongement analytique dans un domaine $\{x \in \mathbb{C}, |\text{Re } x| > A\}$. On en déduit l'analyticité de $f_{\pm}(x, \sigma)$ pour $\sigma \in \mathbb{C}^- \setminus i\mathbb{R}^-$ ce qui fonde la théorie des résonances d'un trou noir; en revanche, la présence de la coupure $i\mathbb{R}^-$ ne nous permet pas de considérer les états antibornés et d'élucider la nature des fréquences

$$\sigma = -\frac{1}{6}(l-1)l(l+1)(l+2)i, \quad (\text{I.15})$$

associées aux potentiels $V_{l,2}$, $l \geq 2$ (fréquences caractéristiques des *perturbations algébriques spéciales* de Chandrasekhar [6]). Outre l'étude de la coupure $i\mathbb{R}^-$, nous laissons ouverts d'autres problèmes fondamentaux :

- existence d'une infinité de résonances;
- leur répartition asymptotique;
- non coïncidence de résonances relatives à des modes distincts;
- validité de la décomposition spectrale (I.10) pour les potentiels $V_{l,s}$,

justifiant ainsi la notion de *coefficients d'excitation*, les C_p , de Sun et Price [32].

La décomposition (I.10) étant établie pour les potentiels à support compact, il est naturel d'étudier l'approximation par troncature des potentiels $V_{l,s}$; cette démarche a été proposée par B. Schmidt [38]. Dans la partie V nous légitimons cette approche en démontrant que les résonances associées à $V_{l,s}$ sont les limites quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow +\infty$, des résonances associées aux potentiels amortis et tronqués $V_{l,s}(x) e^{-\varepsilon|x|^\gamma} \chi_{[a,b]}(x)$, $\gamma > 1$. Il s'agit en fait d'une extension du *paradigme de la membrane* fondé par T. Damour [8], [9], [10], D. A. Mac Donald, R. H. Price, K. S. Thorne [23], la troncature revenant à remplacer respectivement l'horizon du trou noir et l'infini spatial par deux sphères de rayons

respectifs $r(a)$ et $r(b)$, et à considérer un problème aux limites dans la coquille $\mathbb{R}_t \times [a, b]_x \times S^2$ avec conditions dissipatives à la frontière. Nous montrons que le formalisme de la membrane est équivalent à la théorie du semi-groupe $Z(t)$ de Lax et Phillips : le propagateur du problème mixte est isométrique au semi-groupe Z associé au potentiel tronqué, et les valeurs propres de son générateur infinitésimal, en nombre infini, sont les résonances.

Ce résultat nous permet dans la partie VI de développer une procédure de calcul numérique des résonances par une méthode dépendant du temps : l'algorithme de Prony appliqué à la formule (I. 10) fournit la valeur des σ_j (et éventuellement celle des C_j) à partir du signal $t \rightarrow \Phi(t, x)$ préalablement calculé.

Le problème du calcul des résonances est très délicat du fait que ces pôles n'étant pas caractérisés de façon variationnelle, sont très instables vis-à-vis d'un léger changement de potentiel : par exemple, les résonances (en nombre infini) associées à $V_\varepsilon(x) = \varepsilon \chi_{[0, 1]}(x)$ dépendent continûment de $\varepsilon > 0$ mais disparaissent à l'infini quand $\varepsilon \rightarrow 0$; ceci constitue la limitation du procédé de troncature susceptible de faire apparaître des résonances parasites, mais cette difficulté est inhérente à toutes les méthodes connues : on ne dispose pas d'évaluation de l'erreur commise ni de critère permettant d'affirmer que les valeurs obtenues ne sont pas des artefacts numériques engendrés par les inévitables approximations. Ainsi est-il très important d'expérimenter des méthodes différentes et d'en comparer les résultats. A cet égard, notre approche présente le double avantage d'être non stationnaire, et très précise dans le calcul des premières résonances, alors que les principales méthodes employées, fractions continues de E. Leaver [22] et approximation WKB [17] (voir aussi [7], [14], [25], [28], [29]) sont stationnaires et présentent des écarts notables [15]. Nous constatons un accord remarquable entre nos valeurs des premières résonances et celles de Leaver. Cette nouvelle méthode numérique est en cours de développement sur Cray 2 et sera appliquée aux métriques de (De Sitter-) Reissner-Nordström.

II. THÉORIE DE LA DIFFRACTION DÉPENDANT DU TEMPS EN DIMENSION 1

L'objet de cette partie est l'étude des opérateurs d'onde pour l'équation hyperbolique :

$$\partial_t^2 u = -L_V u = \partial_x^2 u - V(x)u, \quad t, x \in \mathbb{R}, \quad (\text{II. 1})$$

considérée comme perturbation de l'équation libre :

$$\partial_t^2 u_0 = -L_0 u_0 = \partial_x^2 u_0, \quad t, x \in \mathbb{R}. \quad (\text{II. 2})$$

Les propriétés spectrales de l'opérateur L_V sont données par la :

PROPOSITION II. 1. — Si le potentiel V satisfait l'hypothèse (I. 13), L_V est un opérateur autoadjoint de domaine dense dans $L^2(\mathbb{R})$ dont le spectre absolument continu est $[0, +\infty[$, le spectre continu-singulier est vide et le spectre ponctuel se compose d'un nombre au plus fini de valeurs propres simples, négatives ou nulles; si V est positif le spectre ponctuel est vide; si V vérifie :

$$\chi_{\mathbb{R}^-}(x) \cdot V(x) \in L^1(\mathbb{R}^-, (1+x^2) dx), \quad (\text{II. 3})$$

0 n'est pas valeur propre.

Remarque II. 1. — Les potentiels $V_{i,s}$ définis par (I. 2) et (I. 3) satisfont les conditions (I. 13) et (II. 3).

Pour $f = {}^t(f_1, f_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \times C_0^\infty(\mathbb{R})$, on définit les formes sesquilinéaires d'énergie associées aux équations (II. 1) et (II. 2) :

$$E(f) = \int_{\mathbb{R}} |f'_1|^2 + |f_2|^2 + V(x) |f_1|^2 dx, \quad (\text{II. 4})$$

$$E_0(f) = \int_{\mathbb{R}} |f'_1|^2 + |f_2|^2 dx. \quad (\text{II. 5})$$

On introduit la forme définie positive :

$$E_+(f) = \int_{\mathbb{R}} |f'_1|^2 + |f_2|^2 + [V_+(x) + \chi_{[0,1]}(x)] |f_1|^2 dx. \quad (\text{II. 6})$$

On note

$$\mathcal{H}_0 = \text{BL}^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}), \quad (\text{II. 7})$$

$$\mathcal{H}_+ = \text{H}_+(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}). \quad (\text{II. 8})$$

Les complétés respectifs de $C_0^\infty(\mathbb{R}) \times C_0^\infty(\mathbb{R})$ pour les normes E_0 et $E_+ \cdot \text{H}_+(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $C^0(\mathbb{R})$ qui contient les constantes et dont le quotient par \mathbb{C} est isométrique à l'espace de Beppo-Lévi $\text{BL}^1(\mathbb{R})$.

On écrit les équations (II. 1) et (II. 2) sous forme vectorielle :

$$\partial_t U(t)f = AU(t)f, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -L_V & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{II. 1 bis})$$

$$\partial_t U_0(t)f = A_0 U_0(t)f, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -L_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{II. 2 bis})$$

où

$$U(t)f = {}^t(u(t), \partial_t u(t)), \quad f = {}^t(u(0), \partial_t u(0)), \quad (\text{II. 9})$$

$$U_0(t)f = {}^t(u_0(t), \partial_t u_0(t)), \quad f = {}^t(u_0(0), \partial_t u_0(0)). \quad (\text{II. 10})$$

A_0 est un opérateur antiautoadjoint sur \mathcal{H}_0 qui génère le groupe unitaire $U_0(t)$; A est défini sur \mathcal{H}_+ au sens des distributions sur \mathbb{R} . Le problème

perturbé est résolu par la :

PROPOSITION II. 2. *L'opérateur A de domaine $D(A) = \{f \in \mathcal{H}_+; Af \in \mathcal{H}_+\}$ engendre un groupe fortement continu d'opérateurs bornés $U(t)$ sur \mathcal{H}_+ qui vérifie :*

$$f \in \mathcal{H}_+, \quad E(U(t)f) = E(f), \quad (\text{II. 11})$$

$$\exists k > 0, \quad \forall f \in \mathcal{H}_+, \quad E_+(U(t)f) \leq e^{k|t|} E_+(f). \quad (\text{II. 12})$$

Pour construire les opérateurs d'onde, nous introduisons certains sous-espaces de \mathcal{H}_+ ; si l'opérateur L_V sur $L^2(\mathbb{R})$ admet N valeurs propres $-\lambda_j^2 < 0$, associées aux vecteurs propres u_j :

$$1 \leq j \leq N, \quad L_V u_j = -\lambda_j^2 u_j, \quad u_j \in L^2(\mathbb{R}), \quad \|u_j\|_{L^2} = 1/\sqrt{2}, \quad (\text{II. 13})$$

on note

$$f_j^\pm = (u_j, \pm \lambda_j u_j) \quad (\text{II. 14})$$

les vecteurs propres de A correspondants :

$$A f_j^\pm = \pm \lambda_j f_j^\pm. \quad (\text{II. 15})$$

Soient \mathcal{P} le sous-espace vectoriel engendré par les f_j^\pm

$$\mathcal{P} = \left\{ \sum_{+,-} \sum_{j=1}^N \alpha_j^\pm f_j^\pm; \alpha_j^\pm \in \mathbb{C} \right\}, \quad (\text{II. 16})$$

\mathcal{H} le E-orthogonal de \mathcal{P} dans \mathcal{H}_+ :

$$\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{H}_+, E(f, g) = 0 \quad \forall g \in \mathcal{P}\}, \quad (\text{II. 17})$$

et P le projecteur E-orthogonal de \mathcal{H}_+ sur \mathcal{H}

$$f \in \mathcal{H}_+, \quad P f = f + \sum_{j=1}^N \lambda_j^{-2} [E(f, f_j^-) f_j^+ + E(f, f_j^+) f_j^-]. \quad (\text{II. 18})$$

\mathcal{H} est un sous-espace $U(t)$ -invariant sur lequel E est une forme positive mais non définie si l'espace :

$$\mathcal{Q} = \text{Ker } A \quad (\text{II. 19})$$

est non trivial. Aussi introduit-on le quotient $\hat{\mathcal{H}}$ de \mathcal{H} par \mathcal{Q} et Π la surjection canonique associée :

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}/\mathcal{Q}, \quad \Pi: \mathcal{H} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}, \quad f \rightarrow \hat{f} = f + \mathcal{Q}. \quad (\text{II. 20})$$

Enfin, pour inverser les opérateurs d'onde, on utilisera :

$$\hat{\mathcal{Q}}_1 = \text{Ker } A^2, \quad (\text{II. 21})$$

et \hat{E} étant l'image de la forme E par Π , $\hat{\mathcal{H}}_1$ désigne le \hat{E} -orthogonal de $\hat{\mathcal{Q}}_1 = \mathcal{Q}_1/\mathcal{Q}$:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_1 \oplus \hat{\mathcal{Q}}_1, \quad \hat{\mathcal{Q}}_1 = \mathcal{Q}_1/\mathcal{Q}. \quad (\text{II. 22})$$

Si V satisfait (II. 3) alors $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1$.

Dans le cas des potentiels $V_{l,s}$, ces espaces sont décrits par la :

PROPOSITION II. 3. — Pour $0 \leq s \leq l$

$$\mathcal{P} = \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 = \{0\}. \tag{II. 23}$$

Pour $s = 1, l = 0$

$$\mathcal{P} = \{0\}, \quad \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 = \mathbb{C} \times \{0\}. \tag{II. 24}$$

Pour $s = 2, l = 0$

$$\dim \mathcal{P} = 1, \tag{II. 25}$$

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 = \left\{ \left(\lambda \cdot \frac{3-2r}{r}, 0 \right), \lambda \in \mathbb{C} \right\}. \tag{II. 26}$$

Pour $s = 2, l = 1$

$$\mathcal{P} = \{0\} \tag{II. 27}$$

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 = \left\{ \left(\frac{\lambda}{r}, 0 \right), \lambda \in \mathbb{C} \right\}. \tag{II. 28}$$

La structure de $\hat{\mathcal{H}}$ est décrite par la :

PROPOSITION II. 4. — Étant donné un potentiel V satisfaisant l'hypothèse (I. 13),

(i) la forme \hat{E} définie sur $\hat{\mathcal{H}}$ par :

$$\hat{f} \in \hat{\mathcal{H}}, \quad \hat{E}(\hat{f}) = E(f), \quad f \in \hat{f}, \tag{II. 29}$$

est une norme sur $\hat{\mathcal{H}}$ équivalente à la norme canonique.

(ii) Si le potentiel V satisfait de plus (II. 3), on a :

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1, \quad \dim \mathcal{Q} \leq 1, \\ 0 \leq V \neq 0 \Rightarrow \mathcal{Q} = \{0\}.$$

Remarques II. 2. — Le potentiel $V_{0,1}$ étant trivial, les constantes sont associées à la fréquence nulle qui est un niveau virtuel et correspondent aux champs électromagnétiques stationnaires du second espace de cohomologie [2].

L'existence d'un état borné pour $V_{0,2}$ découle du fait que les éléments de \mathcal{Q} s'annulent en un point, pour $r = 3/2$ et la valeur de l'unique valeur propre $-\lambda^2 = \sigma^2 < 0$ de $L_{V_{0,2}}$ calculée par la méthode de Prony de la partie VI est donnée par :

$$\sigma = (0,382\,223 \pm 2 \cdot 10^{-6}) i. \tag{II. 30}$$

On doit noter que cette solution ne définit pas une perturbation à symétrie sphérique de l'espace-temps de Schwarzschild car pour $l < s$ l'harmonique sphérique spinorielle correspondante n'existe pas. Quoique pour la même raison les harmoniques $l = 0, l = 1$ ne soient pas considérées d'intérêt

physique pour les ondes gravitationnelles (modes non radiatifs) les fonctions $(3-2r)/r$ et $1/r$ de (II.26) et (II.28) associées au niveau virtuel 0, apparaissent dans l'analyse des perturbations algébriques spéciales de S. Chandrasekhar (fonctions χ (108) de [6]).

Les groupes $U_0(t)$ et $U(t)$ opérant sur des espaces de Hilbert différents, on doit introduire un opérateur d'identification entre ces espaces. Plutôt que d'introduire les opérateurs pseudodifférentiels $L_{V_+}^{-1/2} L_0^{1/2} \oplus \text{Id}$ qui délocalisent les supports, nous choisissons l'injection canonique :

$$\mathcal{I} : \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_0; \quad \forall f \in C_0^\infty, \quad \mathcal{I} f = f, \quad (\text{II.31})$$

et les opérateurs d'ondes

$$W_\pm f = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \Pi P U(-t) \mathcal{I}^{-1} U_0(t) f \text{ dans } \hat{\mathcal{H}} \quad (\text{II.32})$$

qui seront définis *a priori* sur le sous-espace \mathcal{D}_0 dense dans \mathcal{H}_0 :

$$\mathcal{D}_0 = \left\{ f = {}^t(f_1, f_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \times C_0^\infty(\mathbb{R}), \int f_2(x) dx = 0 \right\}. \quad (\text{II.33})$$

Le résultat fondamental de cette partie est le :

THÉORÈME II.1. — *On suppose que le potentiel V satisfait (I.13). Alors pour tout f de \mathcal{D}_0 , les limites $W_+ f$, $W_- f$ existent dans $\hat{\mathcal{H}}$ et on a :*

$$W_\pm f \in \hat{\mathcal{H}}_1, \quad (\text{II.34})$$

$$\hat{E}(W_\pm f) = E_0(f). \quad (\text{II.35})$$

Les opérateurs W_+ , W_- se prolongent de façon unique en isométries de \mathcal{H}_0 sur $\hat{\mathcal{H}}_1$ et l'opérateur de diffraction :

$$S = W_+^{-1} W_- \quad (\text{II.36})$$

est une isométrie de \mathcal{H}_0 sur $\hat{\mathcal{H}}_0$.

Idée de la preuve. — L'existence de $W_\pm f$ pour f dans \mathcal{D}_0 est établie par la méthode de Cook, le potentiel V étant à courte portée (*i.e.* $V \in L^1(\mathbb{R})$). Pour inverser W_+ on introduit le sous-espace L_c^2 de $L^2(\mathbb{R})$, orthogonal aux fonctions propres de L_V sur lequel L_V est un opérateur strictement positif. Le théorème d'Agmon-Kato-Kuroda et le principe d'invariance assurent l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'onde associés à $(L_0|_{L_c^2})^{1/2}$ et $(L_V|_{L_c^2})^{1/2}$. On en déduit que les solutions perturbées de donnée initiale f dans :

$$\mathcal{D}_1 = \{ f = {}^t(\varphi_1, L_V \varphi_2); \varphi_i \in L_c^2, L_V \varphi_i \in L^2(\mathbb{R}) \} \quad (\text{II.37})$$

sont asymptotiquement libres :

$$\exists f_+ \in \mathcal{H}_0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} E_0(U(t)f - U_0(t)f_+) = 0. \quad (\text{II.38})$$

On conclut en montrant que $\Pi P \mathcal{D}_1$ est dense dans $\hat{\mathcal{H}}_1$.

COROLLAIRE II.1. — Si $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 = \{0\}$, toute solution $\Phi(t, x)$ de l'équation (I.1) à données initiales dans \mathcal{H} tend vers 0 dans $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_x)$ quand t tend vers $\pm\infty$.

Remarque II.3. — E. Leaver donne des arguments dans [21] en faveur d'une décroissance polynomiale (en $t^{-2}t^{-3}$ pour $V_{1,2}$). Notre expérimentation numérique a mis en évidence une décroissance exponentielle dominée par la première résonance durant l'intervalle de calcul (cf. la remarque V.4 et la partie VI). Si l'on considère que celui-ci est seulement un temps «intermédiaire», la conjecture de Leaver n'est pas infirmée par nos calculs. Cette situation rappelle le cas bien connu de l'équation de Schrödinger dépendant du temps: la décroissance de $\langle \Psi_0 | e^{itL_V} \Psi_0 \rangle$ est à peu près exponentielle pour des temps ni trop grands ni trop petits, phénomène donnant lieu au fameux *Paradoxe de Zénon quantique*. Le problème du comportement asymptotique ponctuel des solutions de l'équation (I.1) reste ouvert.

Preuve de la proposition II.1. — Nous établissons une série de lemmes qui seront utilisés ultérieurement. On suppose partout que le potentiel V satisfait (I.13).

LEMME II.1. — Toute fonction u de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |u(x)| \leq 2 \|u\|_{H_+} (1 + |x|)^{1/2} \tag{II.39}$$

où

$$\|u\|_{H_+}^2 = \int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^2 + [V_+(x) + \chi_{[0,1]}(x)] |u(x)|^2 dx. \tag{II.40}$$

Preuve. — Pour tout x, t on a :

$$|u(x)|^2 = |u(t) + \int_t^x u'(s) ds|^2 \leq 2(|u(t)|^2 + |x-t| \int |u'(s)|^2 ds).$$

On obtient (II.39) en intégrant cette inégalité par rapport à t dans $[0, 1]$.
Q.E.D.

LEMME II.2. — L'application :

$$u \rightarrow Q_-(u) = \int_{\mathbb{R}} [V_-(x) + \chi_{[0,1]}(x)] |u(x)|^2 dx \tag{II.41}$$

définit une forme quadratique compacte sur H_+ muni de la norme (II.40).

Preuve. — Le lemme II.1 assure l'existence de $Q_-(u)$ pour tout u dans H_+ et si u_n est une suite bornée dans H_+ , la suite $(\chi_{[-N,N]}(x) u_n(x))_n$ est une suite bornée dans l'espace de Sobolev $H^1([-N, N])$ pour tout N . Le théorème d'injection compacte de Rellich-Kondrasov implique que

$(\chi_{[-N, N]}(x) [V_-(x) + \chi_{[0, 1]}(x)] |u_n(x)|^2)_n$ est une suite relativement compacte dans $L^1(\mathbb{R})$, i. e. la forme :

$$Q_-^N(u) = \int_{[-N, N]} [V_-(x) + \chi_{[0, 1]}(x)] |u(x)|^2 dx$$

est compacte sur H_+ . L'inégalité (II.39) permet d'évaluer :

$$|Q_-(u) - Q_-^N(u)| = \int_{|x| \geq N} V_-(x) |u(x)|^2 dx \leq 4 \|u\|_{H_+}^2 \\ \times \int_{|x| \geq N} (1 + |x|) V_-(x) dx.$$

L'hypothèse (I.13) entraîne alors la convergence forte quand $N \rightarrow \infty$ de Q_-^N vers Q_- qui est donc compacte.

Q.E.D.

LEMME II.3.: — (i) L_V est un opérateur autoadjoint de domaine dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

(ii) Les valeurs propres de L_V sont simples, négatives ou nulles, en nombre au plus fini.

(iii) Si V satisfait (II.3), 0 n'est pas valeur propre.

Preuve. — Le point (i) est une conséquence immédiate du fait que V est dans $L^\infty(\mathbb{R})$, et le domaine de L_V est :

$$D(L_V) = \{u \in L^2(\mathbb{R}); u'' \in L^2(\mathbb{R})\} = H^2(\mathbb{R}). \quad (\text{II.42})$$

(ii) Si u et v dans $H^2(\mathbb{R})$ sont deux fonctions propres associées à la même valeur propre λ , leur wronskien est constant :

$$W(u, v) = u'(x)v(x) - u(x)v'(x) = \text{Cte}. \quad (\text{II.43})$$

Le théorème d'injection de Sobolev implique que $u(x)$, $u'(x)$, $v(x)$, $v'(x)$ tendent vers 0 à l'infini; $W(u, v)$ est donc nul et λ est une valeur propre simple.

Soit $\lambda > 0$; V étant dans $L^1(\mathbb{R})$, l'équation intégrale

$$u_\pm(x) = e^{\pm i\sqrt{\lambda}x} + \int_{-\infty}^x \frac{\sin[\sqrt{\lambda}(x-y)]}{\sqrt{\lambda}} V(y) u_\pm(y) dy \quad (\text{II.44})$$

admet une unique solution u_\pm qui vérifie :

$$L_V u_\pm = \lambda u_\pm, \quad (\text{II.45})$$

$$|u_\pm(x) - e^{\pm i\sqrt{\lambda}x}| + |u'_\pm(x) - (\pm i\sqrt{\lambda}e^{\pm i\sqrt{\lambda}x})| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (\text{II.46})$$

(II.45) assure que le wronskien $W(u_+, u_-)$ est constant et égal à $2i\sqrt{\lambda} \neq 0$ par (II.46). Toute solution de (II.45) est ainsi combinaison linéaire de u_+ et u_- et ne peut donc appartenir à $L^2(\mathbb{R})$; on en conclut

que L_V n'a pas de valeur propre dans $]0, +\infty[$. Soient maintenant u et v dans $H^2(\mathbb{R})$ tels que :

$$L_V u = \lambda u, \quad L_V v = \mu v, \quad \lambda < \mu \leq 0.$$

Par multiplication et intégration on obtient :

$$\begin{aligned} Q_-(u) &= \|u\|_{H_+}^2 - \lambda \|u\|_{L_2}^2 \geq \|u\|_{H_+}^2 \\ Q_-(u, v) &= \langle u, v \rangle_{H_+}. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$Q_-(u+v) \geq \|u\|_{H_+}^2 + \|v\|_{H_+}^2 + 2 \operatorname{Re} \langle u, v \rangle_{H_+} = \|u+v\|_{H_+}^2.$$

Cette inégalité et le fait que les valeurs propres soient simples, entraînent que :

$$\|u\|_{H_+}^2 \leq Q_-(u) \tag{II.47}$$

pour tout élément u du sous-espace engendré par les fonctions propres de L_V ; Q_- étant une forme compacte, ce sous-espace est de dimension finie, nulle si V est positif.

Q.E.D.

(iii) a et b étant des nombres complexes donnés, l'hypothèse (II.3) assure que l'équation intégrale :

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^x V(y) \begin{pmatrix} -y & -y^2 \\ 1 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(y) \\ v(y) \end{pmatrix} dy \tag{II.48}$$

admet une unique solution (u, v) qui vérifie :

$$|u(x) - a| + |x| |v(x) - b| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty \tag{II.49}$$

$$L_V(u + xv) = 0. \tag{II.50}$$

Soient $u_1 = u + xv$ pour $(a, b) = (1, 0)$ et $u_2 = u + xv$ pour $(a, b) = (0, 1)$; u_1 et u_2 sont solutions de :

$$L_V u_1 = L_V u_2 = 0$$

et grâce à (II.49)

$$|u_1(x) - 1| + |u_1'(x)| + |u_2(x) - x| + |u_2'(x) - 1| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty. \tag{II.51}$$

De plus, on a

$$W(u_1, u_2) = \text{Cte} = \lim_{x \rightarrow -\infty} u_1'(x) u_2(x) - u_1(x) u_2'(x) = -1.$$

Ainsi toute solution de l'équation $L_V u = 0$ est combinaison linéaire de u_1 et u_2 et ne peut appartenir à $L^2(\mathbb{R})$, i. e. 0 n'est pas valeur propre.

Q.E.D.

LEMME II.4. - L opérateur $(L_V + i)^{-1} - (L_0 + i)^{-1}$ est de classe trace.

Preuve. — On écrit :

$$(L_V + i)^{-1} - (L_0 + i)^{-1} = (L_V + i)^{-1} V(x) g(i \nabla_x), \quad g(i \nabla_x) = (L_0 + i)^{-1}.$$

Pour $\delta \in \left] \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \varepsilon \right[$, $\varepsilon > 0$ étant donné par l'hypothèse (I. 13), on a :

$$V, g \in L^2(\mathbb{R}, (1+x^2)^\delta dx). \quad (\text{II. 52})$$

La condition (II. 52) est suffisante pour que $V(x)g(i \nabla_x)$ soit un opérateur de classe trace ([34], p. 47); $(L_V + i)^{-1}$ étant un opérateur borné, le lemme est démontré.

Q.E.D.

Nous pouvons à présent achever la preuve de la proposition II. 1. On note respectivement $\sigma_{pp}(T)$, $\sigma_{cont}(T)$, $\sigma_{a.c}(T)$, $\sigma_{sing}(T)$, $\sigma_{ess}(T)$ les spectres ponctuel, continu, absolument continu, continu singulier, essentiel d'un opérateur T .

Tout d'abord le lemme II. 4 et le théorème du spectre essentiel de Weyl ([35], p. 113) impliquent que :

$$\sigma_{ess}(L_V) = \sigma_{ess}(L_0) = [0, +\infty[. \quad (\text{II. 53})$$

D'autre part, le lemme II. 3 assure que $\sigma_{pp}(L_V)$ est fini et que toutes les valeurs propres sont simples; on en déduit que :

$$\sigma_{ess}(L_V) = \sigma_{cont}(L_V) = \sigma_{a.c}(L_V) \cup \sigma_{sing}(L_V). \quad (\text{II. 54})$$

Enfin l'hypothèse (I. 13) entraîne que V est un potentiel d'Agmon, et le théorème d'Agmon-Kato-Kuroda ([35], p. 169) assure que :

$$\sigma_{sing}(L_V) = \emptyset. \quad (\text{II. 55})$$

On conclut que :

$$\sigma_{a.c}(L_V) = [0, +\infty[. \quad (\text{II. 56})$$

Q.E.D.

Preuve de la Proposition II. 2. — On réécrit l'équation (II. 1 bis) sous la forme :

$$A_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x^2 - V_+ - \chi_{[0,1]} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V_- + \chi_{[0,1]} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II. 57})$$

On définit le domaine de A_+ :

$$D(A_+) = \{ f \in \mathcal{H}_+; A_+ f \in \mathcal{H}_+ \}. \quad (\text{II. 59})$$

Il est clair que A_+ est un opérateur antiautoadjoint sur \mathcal{H}_+ et génère donc par le théorème de Stone un groupe unitaire $U_+(t)$ sur (\mathcal{H}_+, E_+) . D'autre part, le lemme II. 1 implique que \mathcal{I} est un opérateur borné sur \mathcal{H}_+ . On exprime alors (II. 57) sous la forme de l'équation intégrale :

$$U(t) f = U_+(t) f + \int_0^t U_+(t-s) \mathcal{I} U(s) f ds. \quad (\text{II. 60})$$

Pour tout f dans \mathcal{H}_+ le procédé standard d'itérations successives montre que (II.60) admet une unique solution locale :

$$U(t)f \in C^0(0, T; \mathcal{H}_+), \quad 0 < T. \tag{II.61}$$

De plus, par le lemme de Gronwall on a :

$$E_+(U(t)f) \leq E_+(f)e^{k|t|}, \quad k = \|\mathcal{I}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_+)} \tag{II.62}$$

ce qui assure que $T = +\infty$. Grâce à l'unicité de la solution locale dans $C^0(I; \mathcal{H}_+)$, $I \subset \mathbb{R}$, $U(t)$ est un groupe fortement continu sur \mathcal{H}_+ . Soit A' son générateur infinitésimal de domaine $D(A')$. Pour $f \in D(A')$ on a :

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{U(t)f - f}{t} \in \mathcal{H}_+. \tag{II.63}$$

Or $U(s)f$ étant dans $C^0(\mathbb{R}, \mathcal{H}_+)$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t U_+(t-s) \mathcal{I} U(s) f ds = \mathcal{I} f. \tag{II.64}$$

(II.63) entraîne donc l'existence de la limite :

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{U_+(t)f - f}{t} \in \mathcal{H}_+. \tag{II.65}$$

On en déduit que :

$$f \in D(A_+), \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{U(t)f - f}{t} = A_+ f + \mathcal{I} f = A f. \tag{II.66}$$

Réciproquement pour f dans $D(A_+)$ l'existence de la limite (II.65) entraîne (II.63) et

$$f \in D(A'), \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{U(t)f - f}{t} = A_+ f + \mathcal{I} f = A f. \tag{II.67}$$

Nous en concluons que :

$$D(A') = D(A_+) = \{ f \in \mathcal{H}_+, A f \in \mathcal{H}_+ \}, \quad A' = A. \tag{II.68}$$

Enfin pour $f \in D(A)$, $U(t)f \in C^0(\mathbb{R}, D(A))$ et la conservation de l'énergie (II.11) est une conséquence immédiate de la formule de Green; le lemme II.1 assurant que la forme E est continue sur \mathcal{H}_+ (II.11) est satisfaite pour tout f de \mathcal{H}_+ .

Q.E.D.

Preuve de la Proposition II.3. — La vérification de (II.23) et (II.24) est immédiate puisque dans le premier cas $V_{l,s}$ est strictement positif pour $0 \leq s \leq l$ et dans le second cas $V_{0,1}$ est nul.

Un calcul direct assure que :

$$L_{V_{0,2}} y_0 = 0, \quad y_0 = \frac{3-2r}{r} \in H_+ \cap L^\infty(\mathbb{R}). \quad (\text{II. 69})$$

Comme $V_{0,2}$ satisfait (II. 3), (II. 26) découle des propositions II. 1 et II. 4. On remarque que 0 est un niveau virtuel, que y_0 s'annule pour $r = \frac{3}{2}$ et que $V_{0,2}$ appartient à la classe L_1^1 de Deift et Trubowitz, *i. e.*

$$V_{0,2} \in L^2(\mathbb{R}, (1+|x|) dx). \quad (\text{II. 70})$$

Le théorème des niveaux virtuels ([11], p. 163) implique que :

$$\dim \mathcal{P} \geq 1. \quad (\text{II. 71})$$

Pour établir l'inégalité inverse, nous utilisons un argument du type « oscillation de Sturm ».

Soit $y \in H^2(\mathbb{R})$ une fonction propre réelle vérifiant :

$$L_{V_{0,2}} y = -\lambda^2 y, \quad \lambda > 0. \quad (\text{II. 72})$$

Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$y(\alpha) = 0, \quad y'(\alpha) > 0. \quad (\text{II. 73})$$

Si $\alpha \geq \frac{3}{2}$, il existe $\beta \in]\alpha, +\infty[$ tel que :

$$y(\beta) = 0, \quad y'(\beta) \leq 0, \quad x \in]\alpha, \beta[\Rightarrow y(x) > 0; \quad (\text{II. 74})$$

de même, si $\alpha \leq \frac{3}{2}$, il existe $\beta \in [-\infty, \alpha[$ tel que :

$$y(\beta) = 0, \quad y'(\beta) \leq 0, \quad x \in]\beta, \alpha[\Rightarrow y(x) < 0. \quad (\text{II. 75})$$

On évalue :

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} (y' y_0 - y y_0') dx. \quad (\text{II. 76})$$

D'une part,

$$I = y'(\beta) y_0(\beta) - y'(\alpha) y_0(\alpha) \geq 0, \quad (\text{II. 77})$$

d'autre part,

$$I = \lambda^2 \int_{\alpha}^{\beta} y y_0 dx < 0. \quad (\text{II. 78})$$

La contradiction entre (II. 77) et (II. 78) assure que les solutions de (II. 72) ne s'annulent pas. Si y_1 et y_2 sont des solutions réelles de (II. 72) associées

à des valeurs propres distinctes, on a :

$$\int y_1 y_2 dx = 0. \tag{II. 79}$$

Comme $y_1 y_2$ garde un signe constant on obtient :

$$\dim \mathcal{P} \leq 1. \tag{II. 80}$$

Q.E.D.

Comme précédemment, (II. 28) est conséquence d'un calcul direct et des propositions II. 1 et II. 4. Comme $V_{1,2}$ n'est pas dans la classe L^1_1 , on ne peut tirer partie du fait que $\frac{1}{r}$ ne s'annule pas pour appliquer le théorème des niveaux virtuels et conclure à (II. 27); nous pouvons néanmoins reprendre la technique de Deift et Trubowitz. Supposons qu'il existe y non nul dans $H^2(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$L_{V_{1,2}} y = -\lambda^2 y, \quad 0 < \lambda. \tag{II. 81}$$

Soit $\chi \in C^\infty_0(\mathbb{R})$ telle que :

$$|x| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \chi(x) = 1; \quad |x| \geq 1 \Rightarrow \chi(x) = 0. \tag{II. 82}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit :

$$y_n(x) = \chi\left(\frac{x}{n}\right) \cdot y(x). \tag{II. 83}$$

On montre aisément que :

$$\int_{[-n, n]} |y'_n|^2 + V |y_n|^2 dx = -\lambda^2 \int_{[-n/2, n/2]} |y|^2 dx + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{II. 84}$$

On en déduit que pour n suffisamment grand :

$$\int_{[-n, n]} |y'_n|^2 + V |y_n|^2 dx < 0. \tag{II. 85}$$

Ceci implique que l'opérateur $-\frac{d^2}{dx^2} + V$ sur $L^2([-n, n])$ de domaine

$\{y \in H^2([-n, n]), y(\pm n) = 0\}$ admet une valeur propre strictement négative $-\lambda_n^2$ associée à une fonction propre u :

$$\left. \begin{aligned} -u'' + Vu &= -\lambda_n^2 u, & -n < x < n \\ u(-n) &= u(n) = 0. \end{aligned} \right\} \tag{II. 86}$$

Nous utilisons de nouveau l'argument de Sturm. Il existe α, β vérifiant :

$$-n \leq \alpha < \beta \leq n, \quad u(\alpha) = u(\beta) = 0, \quad u'(\alpha) > 0, \quad u'(\beta) < 0,$$

$$\alpha < x < \beta \Rightarrow u(x) > 0. \quad (\text{II. 87})$$

Soit

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} (u' y_0 - u y_0') dx, \quad y_0 = \frac{1}{r}. \quad (\text{II. 88})$$

D'une part,

$$I = \frac{1}{r(\beta)} u'(\beta) - \frac{1}{r(\alpha)} u'(\alpha) < 0,$$

et d'autre part,

$$I = \lambda_n^2 \int_{\alpha}^{\beta} u(x) \frac{1}{r(x)} dx > 0,$$

ce qui constitue la contradiction souhaitée.

Q.E.D

Preuve de la Proposition II.4. — Nous adoptons l'approche de R. Phillips [31] en l'adaptant à notre cadre fonctionnel.

En notant que les fonctions propres u_j sont dans $H^2(\mathbb{R})$, on établit facilement à l'aide d'intégrations par parties que :

$$\left. \begin{aligned} \forall j, k \in \{1, \dots, N\}, \quad E(f_j^{\pm}, f_k^{\pm}) &= 0 \\ j \neq k &\Rightarrow E(f_j^+, f_k^-) = 0 \\ \forall j = 1, \dots, N, \quad E(f_j^+, f_j^-) &= -\lambda_j^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 89})$$

A l'aide de ces relations, on vérifie que Pf défini par (II. 18) est dans \mathcal{H} ; d'autre part si :

$$f + g = 0, \quad f \in \mathcal{P}, \quad g \in \mathcal{H},$$

on a :

$$E(f, f_j^{\pm}) = 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

(II. 89) implique alors que $f = 0 = g$. On en conclut que tout élément f de \mathcal{H}_+ s'écrit de façon unique $f = g + h$, $g \in \mathcal{P}$, $h \in \mathcal{H}$ et que $h = Pf$; P est donc un projecteur de \mathcal{H}_+ sur \mathcal{H} .

LEMME II. 5. — E est une forme positive sur \mathcal{H} .

Preuve. — Il suffit de démontrer que pour tout $f = {}^t(f_1, f_2)$ dans \mathcal{H} , on a :

$$\|f_1\|_{H_+}^2 - Q_-(f_1) \geq 0. \quad (\text{II. 90})$$

Remarquons que :

$$E({}^t(f_1, 0), f_j^{\pm}) = \frac{1}{2} E(f, f_j^+) + \frac{1}{2} E(f, f_j^-) = 0. \quad (\text{II. 91})$$

Soit une suite $(f_1^n)_n \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\|f_1^n - f_1\|_{H_+} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (\text{II.92})$$

On a :

$$E({}^t(f_1^n, 0), f_j^\pm) = -\lambda_j^2 \langle f_1^n, u_j \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \quad (\text{II.93})$$

et Q_- étant continue sur H_+ , (II.93) implique :

$$E({}^t(f_1^n, 0), f_j^\pm) \rightarrow E({}^t(f_1, 0), f_j^\pm), \quad n \rightarrow \infty. \quad (\text{II.94})$$

On en déduit que :

$$\forall j=1, \dots, N, \quad \langle f_1^n, u_j \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (\text{II.95})$$

On décompose f_1^n sous la forme :

$$f_1^n = g_1^n + h_1^n, \quad g_1^n = \sum_{j=1}^N \alpha_j^n u_j, \quad \forall j \langle h_1^n, u_j \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 0. \quad (\text{II.96})$$

(II.95) implique

$$\|g_1^n\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (\text{II.97})$$

La famille u_j étant L^2 -orthogonale, $\alpha_j^n \rightarrow 0$ et $g_1^n \rightarrow 0$ dans $H^\infty(\mathbb{R})$. On a donc

$$\|f_1 - h_1^n\|_{H_+} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty. \quad (\text{II.98})$$

Or L_V est positif sur le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ orthogonal aux u_j et h_1^n est dans $H^2(\mathbb{R})$; donc

$$\|h_1^n\|_{H_+}^2 - Q_-(h_1^n) = \langle L_V h_1^n, h_1^n \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \geq 0. \quad (\text{II.99})$$

Q_- étant une forme continue sur H_+ on déduit (II.90) de (II.98) et (II.99).

Q.E.D.

LEMME II.6. - $f \in \mathcal{Q} \Leftrightarrow f \in \mathcal{H}$ et $E(f) = 0$.

Preuve. - Si f est dans \mathcal{Q} alors $f_2 = L_V f_1 = 0$. Pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a donc :

$$E(f, {}^t(\varphi, 0)) = \langle L_V f_1, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 0. \quad (\text{II.100})$$

En approchant dans H_+ , f_1 par une suite $\varphi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on en déduit grâce à la continuité de E sur \mathcal{H}_+ que $E(f) = 0$ et de plus :

$$E(f, f_j^\pm) = \langle L_V f_1, u_j \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = 0$$

donc f est élément de \mathcal{H} .

Réciproquement, si $f \in \mathcal{H}$ vérifie $E(f) = 0$, pour tout

$$\varphi = {}^t(\varphi_1, \varphi_2) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \times C_0^\infty(\mathbb{R})$$

on a :

$$0 = E(f, \varphi) = \langle L_V f_1, \bar{\varphi}_1 \rangle + \langle f_2, \bar{\varphi}_2 \rangle$$

où $\langle \rangle$ désigne le crochet des distributions sur \mathbb{R} . On conclut que $L_V f_1 = f_2 = 0$.

Q.E.D.

Nous achevons la preuve de la proposition. Il est clair que :

$$\forall f \in \mathcal{H}, \quad \forall z \in \mathcal{Q}, \quad E(f+z) = E(z), \quad (\text{II. 101})$$

cela justifie la définition :

$$\hat{f} \in \hat{\mathcal{H}}, \quad \hat{E}(\hat{f}) = E(f), \quad f \in \hat{f}. \quad (\text{II. 102})$$

E étant une forme positive sur \mathcal{H} dont l'espace d'annulation est \mathcal{Q} , \hat{E} est définie positive sur $\hat{\mathcal{H}}$. La norme canonique sur $\hat{\mathcal{H}}$ est donnée par :

$$\|\hat{f}\|_{\hat{\mathcal{H}}}^2 = \inf_{f \in \hat{f}} E_+(f). \quad (\text{II. 103})$$

On a immédiatement

$$\hat{E}(\hat{f}) = \inf_{f \in \hat{f}} E(f) \leq \inf_{f \in \hat{f}} E_+(f) = \|\hat{f}\|_{\hat{\mathcal{H}}}^2. \quad (\text{II. 104})$$

Pour établir l'existence de $C > 0$ vérifiant :

$$\forall \hat{f} \in \hat{\mathcal{H}}, \quad \|\hat{f}\|_{\hat{\mathcal{H}}}^2 \leq C \hat{E}(\hat{f}), \quad (\text{II. 105})$$

nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une suite \hat{f}_n de $\hat{\mathcal{H}}$ vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{E}(\hat{f}_n) = 0, \quad (\text{II. 106})$$

$$\forall n, \quad \|\hat{f}_n\|_{\hat{\mathcal{H}}} = 1, \quad \hat{f}_n \rightarrow \hat{F} \quad \text{dans } \hat{\mathcal{H}} - \star. \quad (\text{II. 107})$$

Soit $f_n = (f_{n,1}, f_{n,2}) \in \hat{f}_n$ telle que :

$$1 \leq E_+(f_n) \leq 1 + \frac{1}{n}. \quad (\text{II. 108})$$

Quitte à extraire une sous-suite, il existe $F = (F_1, F_2) \in \mathcal{H}$ tel que :

$$f_{n,1} \rightarrow F_1 \quad \text{dans } H_+ - \star, \quad f_{n,2} \rightarrow F_2 \quad \text{dans } L^2 - \star. \quad (\text{II. 109})$$

On a, pour tout n, m

$$\left. \begin{aligned} \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{\hat{\mathcal{H}}}^2 &\leq E_+(f_n - f_m) = E(f_n - f_m) + Q_-(f_{n,1} - f_{m,1}), \\ \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{\hat{\mathcal{H}}}^2 &\leq 2\hat{E}(\hat{f}_n) + 2\hat{E}(\hat{f}_m) + Q_-(f_{n,1} - f_{m,1}). \end{aligned} \right\} \quad (\text{II. 110})$$

Q_- étant une forme compacte sur H_+ , (II. 89) implique

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} Q_-(f_{n,1} - f_{m,1}) = 0. \quad (\text{II. 111})$$

On conclut de (II. 106), (II. 110) et (II. 111) que \hat{f}_n est une suite de Cauchy dans \mathcal{H} et par (II. 107) que \hat{f}_n tend fortement vers \hat{F} et

$$\|\hat{F}\|_{\mathcal{H}} = 1, \tag{II. 112}$$

$$\hat{E}(\hat{F}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{E}(\hat{f}_n) = 0. \tag{II. 113}$$

La forme \hat{E} étant définie positive, on aboutit à une contradiction.

Q.E.D.

Si le potentiel V satisfait (II. 3) tout élément f de \mathcal{Q} est de la forme :

$$f = {}^t(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, 0), \quad \lambda_i \in \mathbb{C},$$

où u_1, u_2 sont définis par (II. 49) et (II. 50). (II. 39) et (II. 51) impliquent que $\lambda_2 = 0$ et \mathcal{Q} est donc de dimension ≤ 1 . Enfin si V est de plus positif, on déduit des représentations

$$u_1(x) = 1 + \int_{-\infty}^x (x-y)V(y)u_1(y)dy,$$

$$u_1'(x) = \int_{-\infty}^x V(y)u_1(y)dy,$$

que u_1 ne s'annule pas et admet une minoration de type

$$u_1(x) \geq ax + b, \quad a > 0.$$

On conclut par (II. 39) que $\mathcal{Q}_1 = \{0\}$.

Q.E.D.

Preuve du Théorème II. 1. — Nous commençons par établir que pour $f \in \mathcal{D}_0$:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \hat{E}(\Pi P U(t) \mathcal{S}^{-1} U_0(t) f) = E_0(f). \tag{II. 114}$$

Par (II. 18) et (II. 89) on a les égalités :

$$\begin{aligned} \hat{E}(\Pi P U(-t) \mathcal{S}^{-1} U_0(t) f) &= E(P \mathcal{S}^{-1} U_0(t) f) \\ &= E(U_0(t) f) + \sum_{j=1}^N E(U_0(t) f, f_j^+) E(U_0(t) f, f_j^-) \\ &= E_0(f) + \int_{\mathbb{R}} V(x) |[U_0(t) f]_1|^2 dx \\ &+ \sum_{j=1}^N \left\{ E_0(U_0(t) f, f_j^+) + \int V(x) [U_0(t) f]_1 \bar{u}_j(x) dx \right\} \cdot \left\{ E_0(U_0(t) f, f_j^-) \right. \\ &\quad \left. + \int V(x) [U_0(t) f]_1 \bar{u}_j(x) dx \right\}. \end{aligned}$$

Puisque f est dans \mathcal{D}_0 , $[U_0(t) f]_1$ est de la forme

$$[U_0(t) f]_1(x) = \varphi_+(x+t) + \varphi_-(x-t), \quad \varphi_{\pm} \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \tag{II. 115}$$

L'hypothèse (I. 13) entraîne alors immédiatement que :

$$\int V(x) |[U_0(t)f]_1(x)|^2 dx \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \pm \infty, \quad (\text{II. 116})$$

$$\int V(x) [U_0(t)f]_1(x) \bar{u}_j(x) dx \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \pm \infty. \quad (\text{II. 117})$$

Comme f_j^\pm est dans \mathcal{H}_0 et que $U_0(t)f$ converge faiblement vers 0 dans cet espace, on a aussi

$$E_0(U_0(t)f, f_j^\pm) \rightarrow 0, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (\text{II. 118})$$

(II. 114) découle maintenant de (II. 116, 117, 118). Par densité de \mathcal{D}_0 dans \mathcal{H}_0 il suffit donc de montrer que $W_\pm f$ existe sur ce sous-espace et (II. 35) est une conséquence de (II. 114). Nous utilisons la méthode de Cook; pour $f \in \mathcal{D}_0$ on prouve que :

$$\left\{ \hat{E} \left(\frac{d}{dt} (\Pi P U(-t) \mathcal{J}^{-1} U_0(t) f) \right) \right\}^{1/2} \in L^1(\mathbb{R}, dt). \quad (\text{II. 119})$$

On a :

$$\begin{aligned} \hat{E} \left(\frac{d}{dt} \Pi P U(-t) \mathcal{J}^{-1} U_0(t) f \right) &= E \left(P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -V & 0 \end{pmatrix} \mathcal{J}^{-1} U_0(t) f \right) \\ &= \| V \cdot [U_0(t) f]_1 - 2 \sum_{j=1}^N \langle V \cdot [U_0(t) f]_1, u_j \rangle_{L^2} u_j \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq C \| V \cdot [U_0(t) f]_1 \|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

On majore ce dernier terme à l'aide de (II. 115) et de l'hypothèse (I. 13) et on obtient :

$$\hat{E} \left(\frac{d}{dt} \Pi P U(-t) \mathcal{J}^{-1} U_0(t) f \right) \leq C (1 + |t|)^{-2-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \quad (\text{II. 120})$$

ce qui établit (II. 119).

Pour vérifier (II. 34), on considère $z = {}^t(z_1, z_2) \in \mathcal{Q}_1$ qui vérifie :

$$L_V z_1 = L_V z_2 = 0 \quad (\text{II. 121})$$

et on évalue pour $f \in \mathcal{D}_0$

$$\hat{E}(\Pi P U(-t) \mathcal{J}^{-1} U_0(t) f, \Pi z) = E(U_0(t) f, U(t) z).$$

En remarquant que :

$$U(t) z = t A z + z, \quad A z \in \mathcal{Q}, \quad (\text{II. 122})$$

on obtient :

$$\hat{E}(W_\pm f, \Pi z) = \lim_{t \rightarrow +\infty} E(U_0(t) f, z). \quad (\text{II. 123})$$

Or, on a :

$$E(U_0(t) f, z) = E_0(U_0(t) f, z) + \int V(x) [U_0(t) f]_1(x) \bar{z}_1(x) dx \quad (\text{II. 124})$$

et par (II. 115)

$$\left. \begin{array}{l} U_0(t) f \rightarrow 0, \quad \mathcal{H}_0 - *, \quad |t| \rightarrow \infty, \\ [U_0(t) f]_1 \rightarrow 0, \quad L^2(\mathbb{R}) - *, \quad |t| \rightarrow \infty. \end{array} \right\} \quad (\text{II. 125})$$

L'hypothèse (I. 13) et le lemme II. 1 entraînent :

$$V(x) \bar{z}_1(x) \in L^2(\mathbb{R}). \quad (\text{II. 126})$$

(II. 34) est maintenant une conséquence de (II. 123, 124, 125, 126).

Q.E.D.

Pour inverser les opérateurs d'onde, on introduit l'espace :

$$\mathcal{D}_1 = \left\{ f = (f_1, L_V g); f_1, g \in H^2(\mathbb{R}), \quad \forall j \in \{0, \dots, N\} \right. \\ \left. \langle f_1, u_j \rangle_{L^2} = \langle g, u_j \rangle_{L^2} = 0 \right\} \quad (\text{II. 127})$$

où les $u_j, 1 \leq j \leq N$ sont des fonctions propres de L_V associées aux N valeurs propres strictement négatives $-\lambda_j^2$, et u_0 est un éventuel générateur du noyau de L_V . Il est clair que \mathcal{D}_1 est un sous-espace de \mathcal{H} contenant \mathcal{Q} et on note :

$$\hat{\mathcal{D}}_1 = \mathcal{D}_1 / \mathcal{Q} = \Pi \mathcal{D}_1. \quad (\text{II. 128})$$

LEMME II. 7. - $\hat{\mathcal{D}}_1$ est dense dans $\hat{\mathcal{H}}_1$.

Preuve. - Soit $\hat{h} = \Pi(h_1, h_2) \in \hat{\mathcal{H}}$ tel que :

$$\forall \hat{f} \in \hat{\mathcal{D}}_1, \quad \hat{E}(\hat{f}, \hat{h}) = 0. \quad (\text{II. 129})$$

Étant donné $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on écrit :

$$\varphi = g + \sum_{j=0}^N \alpha_j u_j, \quad \langle g, u_j \rangle_{L^2} = 0. \quad (\text{II. 130})$$

On choisit $\hat{f} = \Pi(0, L_V g)$. Il vient par (II. 129) :

$$\langle L_V h_2, \bar{\varphi} \rangle_{(C_0^\infty)', C_0^\infty} = - \sum_{j=1}^N \alpha_j \lambda_j^2 \langle h_2, u_j \rangle_{L^2}. \quad (\text{II. 131})$$

Or h étant dans \mathcal{H} , h est E-orthogonal à f_j^+ et à f_j^- ; donc h_2 est L^2 -orthogonal à u_j . On conclut que :

$$L_V h_2 = 0. \quad (\text{II. 132})$$

En choisissant maintenant $\hat{f} = \Pi(g, 0)$ on montre de même que :

$$L_V h_1 = 0. \quad (\text{II. 133})$$

On conclut de (II. 132) et (II. 133) que h est dans \mathcal{D}_1 ce qui prouve le lemme.

Q.E.D.

LEMME II. 8. — Pour tout f dans \mathcal{D}_1 il existe f_0 dans $H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ tel que :

$$\|U(t)f - U_0(t)f_0\|_{H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{II. 134})$$

Preuve. — On note L_c^2 le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$, orthogonal aux $(u_j)_{0 \leq j \leq N}$ et P_{ac} le projecteur orthogonal sur L_c^2 ; la proposition II. 1 assure que P_{ac} coïncide avec le projecteur sur le sous-espace absolument continu associé à L_V . On pose :

$$L_{V,c} = L_V P_{ac}. \quad (\text{II. 135})$$

$L_{V,c}$ est un opérateur positif sur L^2 , strictement positif sur L_c^2 , ce qui permet d'introduire sa racine carrée :

$$\mu = L_{V,c}^{1/2}. \quad (\text{II. 136})$$

Soit f dans \mathcal{D}_1 :

$$f = {}^t(\varphi_1, L_V \varphi_2), \quad \varphi_i \in H^2(\mathbb{R}) \cap L_c^2. \quad (\text{II. 137})$$

On définit :

$$u_{\pm} = \frac{1}{2}(\varphi_i \mp i \mu \varphi_2) \in H^1(\mathbb{R}) \cap L_c^2. \quad (\text{II. 138})$$

On vérifie aisément que :

$$[U(t)f]_1 = e^{it\mu} u_+ + e^{-it\mu} u_- \in C^0(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R})) \cap C^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R})). \quad (\text{II. 139})$$

Le lemme II. 4 et le théorème de Kuroda-Birman ([34], p. 27) impliquent l'existence des opérateurs d'onde :

$$\Omega_{\pm}(L_0, L_V)u = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itL_0} e^{-itL_V} P_{ac} u, \quad u \in L^2(\mathbb{R}). \quad (\text{II. 140})$$

On en déduit par le principe d'invariance de Kato, que l'on peut définir :

$$\Omega_{\pm}(\mu_0, \mu)u_c = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{it\mu_0} e^{-it\mu} u_c, \quad u_c \in L_c^2 \quad (\text{II. 141})$$

où

$$\mu_0 = L_0^{1/2}. \quad (\text{II. 142})$$

Il existe donc $v_{\pm} \in L^2(\mathbb{R})$ tel que

$$\|e^{\pm it\mu} u_{\pm} - e^{\pm it\mu_0} v_{\pm}\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{II. 143})$$

On remarque que sur L_c^2 on a :

$$0 < \mu_0 \leq \mu. \quad (\text{II. 144})$$

On a alors

$$\| \mu_0 e^{\pm it \mu_0} e^{\mp it \mu} u_{\pm} \|_{L^2} \leq \| \mu u_{\pm} \|_{L^2} \leq c \| u_{\pm} \|_{H^1}. \quad (\text{II. 145})$$

On en conclut que

$$v_{\pm} \in H^1(\mathbb{R}) \quad (\text{II. 146})$$

et

$$\mu_0 e^{-it \mu_0} e^{it \mu} u_+ \rightarrow \mu_0 v_+ \quad \text{dans } L^2 - *, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (\text{II. 147})$$

$$\| \mu_0 v_+ \|_{L^2} \leq \| \mu u_+ \|_{L^2}. \quad (\text{II. 148})$$

On a aussi

$$u_+ = s\text{-}\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-it \mu} e^{it \mu_0} v_+ \quad (\text{II. 149})$$

et

$$\| \mu u_+ \|_{L^2} \leq \| \mu_0 v_+ \|_{L^2} + \liminf_{t \rightarrow +\infty} \| (\mu - \mu_0) e^{it \mu_0} v_+ \|_{L^2}. \quad (\text{II. 150})$$

Nous allons montrer que

$$\forall v \in H^1(\mathbb{R}), \quad \| (\mu - \mu_0) e^{it \mu_0} v \|_{L^2} \rightarrow 0, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (\text{II. 151})$$

$(\mu_0^2 + 1)^{-1/2}$ étant un isomorphisme de L^2 sur H^1 , (II. 151) est équivalent à :

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}), \quad \| (\mu - \mu_0) (\mu_0^2 + 1)^{-1/2} e^{it \mu_0} u \|_{L^2} \rightarrow 0, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (\text{II. 152})$$

On remarque qu'il existe $C > 0$ tel que

$$0 \leq \mu \leq \mu_0 + C, \quad (\text{II. 153})$$

ce qui implique

$$\sup_t \| (\mu - \mu_0) (\mu_0^2 + 1)^{-1/2} e^{it \mu_0} \|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq M < \infty. \quad (\text{II. 154})$$

Il suffit donc d'établir (II. 152) pour u dans $H^1(\mathbb{R})$, *i. e.*

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}), \quad \| (\mu - \mu_0) (\mu_0^2 + 1)^{-1} e^{it \mu_0} u \|_{L^2} \rightarrow 0, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (\text{II. 155})$$

LEMME II.9. — $(\mu - \mu_0) (\mu_0^2 + 1)^{-1}$ est un opérateur compact sur $L^2(\mathbb{R})$.

Admettant ce résultat, (II. 155) est une conséquence de la convergence faible :

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}), \quad e^{it \mu_0} u \rightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}) - *, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (\text{II. 156})$$

On déduit alors de (II. 150) que

$$\| \mu u_+ \|_{L^2} \leq \| \mu_0 v_+ \|_{L^2} \quad (\text{II. 157})$$

et avec (II. 148) il vient

$$\| \mu_0 v_+ \|_{L^2} = \| \mu u_+ \|_{L^2}. \quad (\text{II. 158})$$

Or

$$\mu e^{-it\mu} e^{it\mu_0} v_+ \rightarrow \mu u_+ \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}) - \star, \quad t \rightarrow +\infty \quad (\text{II. 159})$$

et par (II. 151) et (II. 158)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mu e^{-it\mu} e^{it\mu_0} v_+\|_{L^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mu_0 e^{it\mu_0} v_+\|_{L^2} = \|\mu u_+\|_{L^2}. \quad (\text{II. 160})$$

On conclut de (II. 159) et (II. 160) que

$$\mu e^{-it\mu} e^{it\mu_0} v_+ \rightarrow \mu u_+ \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (\text{II. 161})$$

Compte tenu de (II. 144) on en déduit que

$$\|\mu_0 P_{ac}(e^{it\mu_0} v_+ - e^{it\mu} u_+)\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{II. 162})$$

Or

$$\mu_0 (\text{Id} - P_{ac})(e^{it\mu_0} v_+ - e^{it\mu} u_+) = \mu_0 (\text{Id} - P_{ac}) e^{it\mu_0} v_+ \quad (\text{II. 163})$$

et $\mu_0 (\text{Id} - P_{ac})$ est un opérateur borné de rang fini, donc compact, ce qui implique

$$\|\mu_0 (\text{Id} - P_{ac})(e^{it\mu_0} v_+ - e^{it\mu} u_+)\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{II. 164})$$

On conclut de (II. 143), (II. 162), (II. 164) que

$$\|e^{it\mu} u_+ - e^{it\mu_0} v_+\|_{H^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (\text{II. 165})$$

et en utilisant (II. 151)

$$\|\mu e^{it\mu} u_+ - \mu_0 e^{it\mu_0} v_+\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{II. 166})$$

Finalement, en posant

$$f_0 = {}^t(v_+ + v_-, i\mu_0(v_+ - v_-)) \quad (\text{II. 167})$$

on obtient (II. 134).

Q.E.D.

Preuve du Lemme II.9. — On utilise la représentation intégrale ([18], p. 284)

$$(\mu - \mu_0)(\mu^2 + 1)^{-1} = \int_0^\infty T(\lambda) d\lambda \quad (\text{II. 168})$$

où

$$T(\lambda) = \pi^{-1} \lambda^{-1/2} [(\mu^2 + \lambda)^{-1} \mu^2 - (\mu_0^2 + \lambda)^{-1} \mu_0^2] (\mu_0^2 + 1)^{-1}. \quad (\text{II. 169})$$

Par construction μ et μ_0 sont reliés par la relation

$$\mu^2 = \mu_0^2 + \text{VP}_{ac} + \text{R} \quad (\text{II. 170})$$

où

$$\text{R} = \mu_0^2 (P_{ac} - \text{Id}) \quad (\text{II. 171})$$

est un opérateur borné de rang fini. A l'aide de l'inégalité de Hille-Yoshida on obtient alors

$$\|T(\lambda)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))} \leq c \operatorname{Inf}(\lambda^{-1/2}, \lambda^{-3/2}) \in L^1(\mathbb{R}_\lambda^+). \quad (\text{II. 172})$$

Il suffit donc de montrer que pour tout λ , $T(\lambda)$ est un opérateur compact. Or on a

$$T(\lambda) = \pi^{-1} \lambda^{1/2} [(\mu^2 + \lambda)^{-1}] \cdot [(VP_{ac} + R)(\mu_0^2 + 1)^{-1}] [(\mu_0^2 + \lambda)^{-1}] \quad (\text{II. 173})$$

$(\mu_0^2 + 1)^{-1}$ étant un opérateur borné de $L^2(\mathbb{R})$ sur $H^2(\mathbb{R})$ et P_{ac} un opérateur borné de $H^2(\mathbb{R})$ dans lui-même, pour tout entier N , l'opérateur

$$T_N(\lambda) = \pi^{-1} \lambda^{1/2} [(\mu^2 + \lambda)^{-1}] [\chi_{\{-N, N\}}(x) \cdot V \cdot P_{ac} + R](\mu_0^2 + 1)^{-1} \cdot [(\mu_0^2 + \lambda)^{-1}] \quad (\text{II. 174})$$

est compact sur L^2 d'après le théorème d'injection compacte de Rellich-Kondrasov. Or, en utilisant l'injection de Sobolev

$$H^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow C \subset L^\infty(\mathbb{R}) \quad (\text{II. 175})$$

on obtient

$$\|T_N(\lambda) - T(\lambda)\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))} \leq C \|\chi_{\{|x| \geq N\}}(x) V(x)\|_{L^2}. \quad (\text{II. 176})$$

L'hypothèse (I. 13) entraîne donc la convergence forte de $T_N(\lambda)$ vers $T(\lambda)$ qui est donc compact.

Q.E.D.

Nous achevons la preuve du théorème. Étant donné f dans \mathcal{D}_1 , le lemme II. 8 assure l'existence de f_0 dans $H^1 \times L^2$ tel que

$$\|U(t)f - U_0(t)f_0\|_{H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{II. 177})$$

On évalue

$$\begin{aligned} & \hat{E}(\Pi f - \Pi P U(-t) \mathcal{S}^{-1} U_0(t) f_0) \\ &= E(U(t)f - P U_0(t) f_0) \leq C \|U(t)f - P U_0(t) f_0\|_{H^1 \times L^2} \\ & \leq C \{ \|U(t)f - U_0(t) f_0\|_{H^1 \times L^2} + \|(\text{Id} - P) U_0(t) f_0\|_{H^1 \times L^2} \}. \end{aligned} \quad (\text{II. 178})$$

$\text{Id} - P$ étant un opérateur de rang fini on a :

$$(\text{Id} - P) U_0(t) f_0 \rightarrow 0 \quad \text{dans } H^1 \times L^2, \quad t \rightarrow \infty. \quad (\text{II. 179})$$

On déduit de (II. 177) (II. 179) que $\Pi f = W_+ f_0$ et donc que

$$\hat{\mathcal{D}}_1 \subset W_+ \mathcal{H}_0.$$

On conclut par le lemme II. 7 que W_\pm sont des isométries de \mathcal{H}_0 sur $\hat{\mathcal{H}}_1$ et que l'opérateur de diffraction S est une isométrie de \mathcal{H}_0 dans \mathcal{H}_0 .

Q.E.D.

Preuve du Corollaire. — Soient f dans \mathcal{H} et $\varepsilon > 0$ donnés. Comme $\hat{\mathcal{D}}_1$ est dense dans $\hat{\mathcal{H}}_1$ et que si $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 = \{0\}$, alors $\hat{\mathcal{H}}_1 = \mathcal{H}$, le lemme II. 1

assure qu'il existe g dans \mathcal{D}_1 tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|[U(t)f]_1 - [U(t)g]_1\|_{L^\infty([-p, p]_x)} \leq C_p \varepsilon. \quad (\text{II. 180})$$

D'après ce qui précède, il existe g_0 tel que

$$g_0 = {}^t(w_1, w_2), \quad w_j \in H^1(\mathbb{R}), \quad (\text{II. 181})$$

$$\|[U(t)g]_1 - [U_0(t)g_0]_1\|_{H^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (\text{II. 182})$$

Les fonctions de $H^1(\mathbb{R})$ étant continues bornées et tendant vers zéro à l'infini, on a :

$$\|[U_0(t)g_0]_1\|_{L^\infty([-p, p]_x)} \rightarrow 0, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (\text{II. 183})$$

On conclut de (II. 180, 182, 183) que

$$\|[U(t)f]_1\|_{L^\infty([-p, p]_x)} \rightarrow 0, \quad |t| \rightarrow \infty. \quad (\text{II. 184})$$

Q.E.D.

III. REPRÉSENTATIONS SPECTRALES-MATRICE D'HEISENBERG

Une représentation spectrale permet de représenter un groupe unitaire par l'opérateur de multiplication $e^{i\sigma t}$ sur $L^2(\mathbb{R}_\sigma; \mathcal{N})$ où \mathcal{N} est un espace de Hilbert auxiliaire, ici \mathcal{N} est l'espace $L^2(\{-1, 1\}_\omega) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Pour définir la représentation libre, on introduit la fonction propre généralisée φ_0 de A_0 pour la fréquence σ ,

$$\left. \begin{aligned} &\sigma \in \mathbb{R}^*, \quad \omega \in \{-1, 1\}, \\ &\varphi_0(x, \sigma, \omega) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} {}^t(e^{-i\sigma x \omega}, i\sigma e^{-i\sigma x \omega}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 1})$$

et pour $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x) \times C_0^\infty(\mathbb{R}_x)$ on pose :

$$\mathcal{R}_0 f(\sigma, \omega) = E_0(f, \varphi_0(\cdot, \sigma, \omega)). \quad (\text{III. 2})$$

\mathcal{R}_0 se prolonge en une isométrie de \mathcal{H}_0 sur $L^2(\mathbb{R}_\sigma \times \{-1, 1\}_\omega)$ vérifiant :

$$[\mathcal{R}_0 U_0(t)f](\sigma, \omega) = e^{i\sigma t} [\mathcal{R}_0 f](\sigma, \omega). \quad (\text{III. 3})$$

Nous considérons le groupe unitaire perturbé $\hat{U}_1(t)$ sur $\hat{\mathcal{H}}_1$ défini par :

$$\hat{f} \in \hat{\mathcal{H}}_1, \quad \hat{U}_1(t)\hat{f} = \Pi U(t)f, \quad f \in \hat{f}. \quad (\text{III. 4})$$

On introduit les représentations spectrales, sortante \mathcal{R}_+ , rentrante \mathcal{R}_- , de $\hat{\mathcal{H}}_1$ associées au groupe unitaire $\hat{U}_1(t)$ en posant :

$$\hat{f} \in \hat{\mathcal{H}}_1, \quad \mathcal{R}_\pm \hat{f} = \mathcal{R}_0 W_\pm^{-1} \hat{f}. \quad (\text{III. 5})$$

La complétude asymptotique et la relation :

$$W_\pm U_0(t) = \hat{U}_1(t) W_\pm \quad (\text{III. 6})$$

assurent que \mathcal{R}_+ et \mathcal{R}_- sont des isométries de \mathcal{H}_1 sur $L^2(\mathbb{R}_\sigma \times \{-1, 1\}_\omega)$ vérifiant :

$$\hat{f} \in \mathcal{H}_1, \quad [\mathcal{R}_\pm \hat{U}_1(t) \hat{f}](\sigma, \omega) = e^{it\sigma} [\mathcal{R}_\pm \hat{f}](\sigma, \omega). \quad (\text{III. 7})$$

Nous montrons que \mathcal{R}_+ et \mathcal{R}_- sont caractérisées par une formule analogue à (III. 2) à l'aide de fonctions propres généralisées $\varphi_\pm(x, \sigma, \omega)$ de A : pour $\sigma \in \mathbb{R}^*$, la solution $u_\pm(x, \sigma, \omega)$ du problème :

$$\left. \begin{aligned} L_V u_\pm &= \sigma^2 u_\pm, \\ u_\pm(x, \sigma, \omega) &= e^{-i\sigma x \omega} + v_\pm(x, \sigma, \omega), \\ v_\pm(x, \sigma, \omega) &\sim e^{\pm i\sigma|x|}, \quad |x| \rightarrow \infty, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 8})$$

est obtenue en choisissant :

$$u_\pm(x, \sigma, \omega) = T(\pm\sigma) f_{\mp\omega}(x, \pm\sigma) \quad (\text{III. 9})$$

où les fonctions de Jost f_\pm sont données par (I. 7) et le coefficient de transmission $T(\sigma)$ est défini par :

$$T(\sigma) \cdot W(\sigma) = 2i\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{R}^*; \quad (\text{III. 10})$$

on pose alors :

$$\varphi_\pm(x, \sigma, \omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} {}^t(u_\pm(x, \sigma, \omega), i\sigma u_\pm(x, \sigma, \omega)). \quad (\text{III. 11})$$

THÉORÈME III. 1. — *On suppose que le potentiel V satisfait l'hypothèse (I. 13). Alors l'ensemble*

$$\hat{\mathcal{D}}_{1,1} = \Pi \mathcal{D}_{1,1}, \quad \mathcal{D}_{1,1} = \left\{ f \in \mathcal{D}_1; \frac{df_1}{dx}, f_2 \in L^1(\mathbb{R}) \right\} \quad (\text{III. 12})$$

est dense dans \mathcal{H}_1 et pour tout $\hat{f} \in \hat{\mathcal{D}}_{1,1}$ on a :

$$\mathcal{R}_\pm \hat{f} = E(f, \varphi_\mp), \quad f \in \hat{f} \cap \mathcal{D}_{1,1} \quad (\text{III. 13})$$

La formule (III. 13) nous permet de faire le lien avec la théorie stationnaire de la diffraction. L'opérateur de diffraction S est unitairement équivalent à l'isométrie \mathcal{S} de $L^2(\mathbb{R}_\sigma \times \{-1, 1\}_\omega)$:

$$\mathcal{S} = \mathcal{R}_+ \mathcal{R}_-^{-1} = \mathcal{R}_0 S \mathcal{R}_0^{-1}. \quad (\text{III. 14})$$

Nous montrons que \mathcal{S} est représentable par la matrice d'Heisenberg $\mathcal{S}(\sigma, \omega, \eta)$ associée à l'équation de Schrödinger (I. 5) :

$$\begin{aligned} \sigma \in \mathbb{R}^*, \quad \omega \in \{-1, 1\}, \quad \mathcal{S}(\sigma, \omega, \omega) &= T(\sigma), \\ \mathcal{S}(\sigma, \omega, -\omega) &= R_{-\omega}(\sigma), \end{aligned} \quad (\text{III. 15})$$

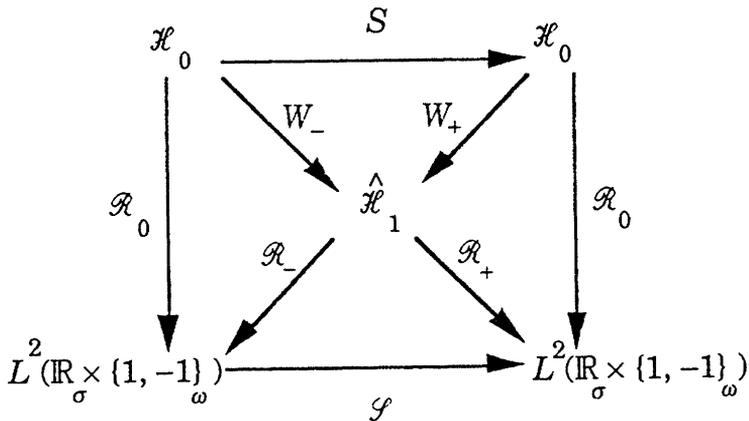
où les coefficients de réflexion $R_\omega(\sigma)$ sont définis par :

$$\left. \begin{aligned} 2i\sigma R_+(\sigma) &= T(\sigma) \left[f_+(x, -\sigma) \frac{df_-}{dx}(x, \sigma) - f_-(x, \sigma) \frac{df_+}{dx}(x, -\sigma) \right], \\ 2i\sigma R_-(\sigma) &= T(\sigma) \left[f_+(x, \sigma) \frac{df_-}{dx}(x, -\sigma) - f_-(x, -\sigma) \frac{df_+}{dx}(x, \sigma) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 16})$$

THÉORÈME III. 2. — On suppose que le potentiel V satisfait l'hypothèse (I. 13). Alors pour tout $F \in L^2(\mathbb{R}_\sigma \times \{-1, 1\}_\omega)$ on a :

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{S}F)(\sigma, \omega) &= T(\sigma)F(\sigma, \omega) + R_{-\omega}(\sigma)F(\sigma, -\omega), & \sigma \in \mathbb{R}^*, \\ & \omega \in \{-1, 1\}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{III. 17})$$

de plus, le diagramme suivant est commutatif et tous les opérateurs sont des isométries surjectives :



Remarque III. 1. — Il suffit que le potentiel V soit simplement dans $L^1(\mathbb{R})$ pour assurer l'existence de la matrice \mathcal{S} ; on peut alors définir l'opérateur S par la relation (III. 14); nous laissons ouvert le problème de la construction d'un espace $\hat{\mathcal{H}}_1$ et d'opérateurs d'onde W_\pm .

Preuve du théorème III. 1. — Nous rappelons quelques propriétés classiques des fonctions de Jost. Pour $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\text{Im } \sigma \geq 0$, $f_\pm(x, \sigma)$ est construit en posant :

$$f_\pm(x, \sigma) = e^{\pm i\sigma x} m_\pm(x, \sigma) \quad (\text{III. 18})$$

où $m_{\pm}(x, \sigma)$ est l'unique solution de l'équation intégrale :

$$m_{\pm}(x, \sigma) = 1 + \int_{\pm\infty}^x \frac{1}{2i\sigma} (1 - e^{\pm 2i\sigma(y-x)}) V(y) m_{\pm}(y, \sigma) dy \quad (\text{III. 19})$$

que l'on résout par itérations successives, l'hypothèse (I. 13) assurant que :

$$(1 - e^{\pm 2i\sigma(y-x)}) V(y) \in L^1((\pm\infty, x), dy). \quad (\text{III. 20})$$

On obtient immédiatement que pour $\text{Im } \sigma \geq 0, \sigma \neq 0$,

$$\|e^{\mp i\sigma x} f_{\pm}(x, \sigma)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_x)} + \left\| e^{\mp i\sigma x} \frac{d}{dx} f_{\pm}(x, \sigma) \right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_x)} \leq c(\sigma) < +\infty. \quad (\text{III. 21})$$

Pour σ réel non nul, $f_{+}(x, \sigma)$ et $f_{+}(x, -\sigma)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation :

$$L_V u = \sigma^2 u \quad (\text{III. 22})$$

puisque leur wronskien est non nul :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} f_{+}(x, \sigma) \cdot f_{+}(x, -\sigma) - f_{+}(x, \sigma) \cdot \frac{d}{dx} f_{+}(x, -\sigma) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{d}{dx} f_{+}(x, \sigma) \cdot f_{+}(x, -\sigma) - f_{+}(x, \sigma) \cdot \frac{d}{dx} f_{+}(x, -\sigma) \right] \\ &= 2i\sigma \neq 0, \quad (\text{III. 23}) \end{aligned}$$

Il en est de même pour $f_{-}(x, \sigma)$ et $f_{-}(x, -\sigma)$. il existe donc des fonctions $T_{\pm}(\sigma), R_{\pm}(\sigma)$ telles que :

$$\sigma \in \mathbb{R}^*, \quad f_{\mp}(x, \sigma) = \frac{R_{\pm}(\sigma)}{T_{\pm}(\sigma)} f_{\pm}(x, \sigma) + \frac{1}{T_{\pm}(\sigma)} f_{\pm}(x, -\sigma). \quad (\text{III. 24})$$

On montre facilement (cf. par exemple [11]) que les coefficients de transmission T_{\pm} et de reflexion R_{\pm} vérifient les relations ($\sigma \in \mathbb{R}^*$) :

$$T_{+}(\sigma) = T_{-}(\sigma) = T(\sigma) \quad (\text{III. 25})$$

$$T(-\sigma) = \bar{T}(\sigma), \quad R_{\pm}(-\sigma) = \bar{R}_{\pm}(\sigma) \quad (\text{III. 26})$$

$$T(\sigma) \bar{R}_{-}(\sigma) + R_{+}(\sigma) \bar{T}(\sigma) = 0 \quad (\text{III. 27})$$

$$|T(\sigma)|^2 + |R_{+}(\sigma)|^2 = 1 = |T(\sigma)|^2 + |R_{-}(\sigma)|^2. \quad (\text{III. 28})$$

On déduit de (III. 21) et (III. 25) que la solution u_{\pm} de (III. 8) est donnée par la formule (III. 9).

LEMME III. 1. — *Un nombre complexe $\sigma^2, \sigma^2 < 0, 0 < \text{Im } \sigma$ est une valeur propre de L_V dans $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si $W(\sigma) = 0$; une fonction propre associée u vérifie :*

$$u, u' \in L^1(\mathbb{R}). \quad (\text{III. 29})$$

Preuve. — Les fonctions de Jost $f_{\pm}(x, \sigma)$ satisfont pour $\text{Im } \sigma > 0$

$$f_{\pm}(\cdot, \sigma) \in L^2(\mathbb{R}_x^+). \quad (\text{III. 30})$$

Si $W(\sigma)=0$, f_+ et f_- sont colinéaires et donc fonctions propres de L_V dans $L^2(\mathbb{R})$. Réciproquement, $\sigma^2 < 0$ étant une valeur propre admettant u comme fonction propre associée, supposons que $W(\sigma) \neq 0$; il existe alors des réels λ_+ , λ_- tels que :

$$u = \lambda_+ f_+ + \lambda_- f_- \in L^2(\mathbb{R}). \quad (\text{III. 31})$$

(III. 30) et (III. 31) impliquent alors que f_+ et f_- sont des fonctions propres dans $L^2(\mathbb{R})$. Les valeurs propres étant simples d'après le lemme II. 3, $W(\sigma)=0$. Nous concluons que les fonctions propres u de L_V dans $L^2(\mathbb{R})$ sont colinéaires à f_{\pm} quand $W(\sigma)=0$. (III. 21) entraîne que u et u' sont exponentiellement décroissants quand $|x| \rightarrow \infty$, ce qui prouve (III. 29).

Q.E.D.

La démonstration du Lemme II. 7 assure la densité de $\mathcal{D}_{1,1}$ dans \mathcal{H}_1 car g défini par (II. 130) vérifie grâce au Lemme III. 1

$$g, g', L_V g \in L^1(\mathbb{R}) \quad (\text{III. 32})$$

et donc

$$\Pi(0, L_V g), \Pi(g, 0) \in \mathcal{D}_{1,1}. \quad (\text{III. 33})$$

Q.E.D.

Pour établir la formule (III. 13) nous utilisons la complétude asymptotique des opérateurs d'onde, et le principe d'invariance pour se ramener au cas connu de l'équation de Schrödinger [37].

Soit \hat{f} dans $\mathcal{D}_{1,1}$:

$$\hat{f} = \Pi f, \quad f = {}^t(\varphi_1, L_V \varphi_2) \in \mathcal{D}_{1,1}. \quad (\text{III. 34})$$

Il suffit de considérer le cas où φ_1 et φ_2 sont à valeur réelle.

Les définitions (III. 1) et (III. 5) entraînent :

$$\mathcal{R}_+ \hat{f}(\sigma, \omega) = \sigma \mathcal{F}([\mathbb{W}_+^{-1} \hat{f}]_1)(-\sigma\omega) - i \mathcal{F}([\mathbb{W}_+^{-1} \hat{f}]_2)(-\sigma\omega) \quad (\text{III. 35})$$

où

$$\mathcal{F} u(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\sigma x} u(x) dx, \quad u \in L^1(\mathbb{R}). \quad (\text{III. 36})$$

Le lemme II. 8 et (II. 167) assurent que :

$$[\mathbb{W}_+^{-1} \hat{f}]_1 = \frac{1}{2} [\Omega_- (\varphi_1 - i\mu \varphi_2) + \Omega_+ (\varphi_1 + i\mu \varphi_2)] \quad (\text{III. 37})$$

$$[\mathbb{W}_+^{-1} \hat{f}]_2 = \frac{i}{2} [\Omega_- (\mu\varphi_1 - iL_V \varphi_2) - \Omega_+ (\mu\varphi_1 + iL_V \varphi_2)] \quad (\text{III. 38})$$

où Ω_{\pm} sont définis par (II. 140) et

$$\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm}(L_0, L_V). \quad (\text{III. 39})$$

Le potentiel V étant réel, l'invariance par renversement du temps implique :

$$\Omega_- u = (\Omega_+ u^*)^* \tag{III. 40}$$

où z^* désigne le complexe conjugué d'un complexe z .

D'autre part on a :

$$\Omega_{\pm} \mu = \mu_0 \Omega_{\pm}, \quad \Omega_{\pm} L_V = \mu_0^2 \Omega_{\pm}. \tag{III. 41}$$

On déduit de (III. 35, 37, 38, 40, 41) que :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_+ \hat{f}(\sigma, \omega) = & \frac{1}{2} \{ (\sigma + |\sigma|) [\mathcal{F} \Omega_+ \varphi_1]^*(\sigma\omega) \\ & + (\sigma - |\sigma|) [\mathcal{F} \Omega_+ \varphi_1](-\sigma\omega) - i\sigma(\sigma + |\sigma|) [\mathcal{F} \Omega_+ \varphi_2]^*(\sigma\omega) \\ & - i\sigma(\sigma - |\sigma|) [\mathcal{F} \Omega_+ \varphi_2](-\sigma\omega) \}. \end{aligned} \tag{III. 42}$$

La construction de la représentation spectrale pour l'opérateur de Schrödinger assure que (cf. par exemple [37], p. 230)

$$\begin{aligned} [\mathcal{F} \Omega_+ \varphi](|\sigma|\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(x) u_+^*(x, |\sigma|, -\omega) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \varphi(x) u_-^*(x, -|\sigma|, \omega) dx. \end{aligned} \tag{III. 43}$$

On déduit de (III. 42) et (III. 43) que :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_+ \hat{f}(\sigma, \omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int [\sigma\varphi_1(x) - i\sigma^2\varphi_2(x)] u_-^*(x, \sigma, \omega) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left[\frac{1}{\sigma} \varphi_1(x) - i\varphi_2(x) \right] (L_V u_-)^*(x, \sigma, \omega) dx. \end{aligned} \tag{III. 44}$$

Sachant que φ_i, u_- sont dans l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$, une intégration par partie conduit à la formule (III. 13).

Q.E.D.

Preuve du Théorème III. 2. — Par densité de $\hat{\mathcal{D}}_{1,1}$ dans $\hat{\mathcal{H}}_1$ il suffit, pour établir la formule (III. 17), de montrer que :

$$\begin{aligned} \forall \hat{f} \in \hat{\mathcal{D}}_{1,1}, \quad \mathcal{R}_+ \hat{f}(\sigma, \omega) \\ = T(\sigma) (\mathcal{R}_- \hat{f})(\sigma, \omega) + R_{-\omega}(\sigma) (\mathcal{R}_- \hat{f})(\sigma, -\omega). \end{aligned} \tag{III. 45}$$

Par le théorème III. 1, la relation (III. 45) est équivalente à :

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{D}_{1,1}, \quad E(f, \varphi_-(\sigma, \omega)) = T(\sigma) E(f, \varphi_+(\sigma, \omega)) \\ + R_{-\omega}(\sigma) E(f, \varphi_+(\sigma, -\omega)). \end{aligned} \tag{III. 46}$$

Il suffit donc de prouver que :

$$u_-^*(x, \sigma, \omega) = T(\sigma) u_+^*(x, \sigma, \omega) + R_{-\omega}(\sigma) u_+^*(x, \sigma, -\omega). \tag{III. 47}$$

Or, en appliquant successivement (III.9), (III.24), (III.25), (III.26), (III.27), on obtient :

$$\begin{aligned} u_-(x, \sigma, \omega) &= T^*(\sigma) f_\omega(x, -\sigma) \\ &= T^*(\sigma) u_+(x, \sigma, \omega) + R_{-\omega}(-\sigma) u_+(x, \sigma, -\omega) \\ &= T^*(\sigma) u_+(x, \sigma, \omega) + R_{-\omega}^*(\sigma) u_+(x, \sigma, -\omega). \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

Q.E.D.

IV. ANALYTICITÉ DE LA MATRICE DE DIFFRACTION

Pour $\sigma \in \mathbb{R}^*$, les fonctions de Jost $f_\pm(x, \sigma)$ sont obtenues en résolvant par itérations successives l'équation intégrale :

$$f_\pm(x, \sigma) = e^{\pm i \sigma x} + \int_{\pm\infty}^x \frac{\sin \sigma(x-y)}{\sigma} V(y) f_\pm(y, \sigma) dy. \quad (\text{IV.1})$$

Les propriétés classiques d'analyticité par rapport à σ sont données par la :

PROPOSITION IV.1. — *On suppose que le potentiel V satisfait l'hypothèse (I.13). Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, les fonctions de σ , $f_\pm(x, \sigma)$ sont continues dans $\{\sigma \in \mathbb{C}, \text{Im } \sigma \geq 0, \sigma \neq 0\}$ et analytiques dans $\{\sigma \in \mathbb{C}, \text{Im } \sigma > 0\}$. Si, de plus, il existe $\alpha_\pm \geq 0, C_\pm > 0$ tels que :*

$$|V(x)| \leq C_\pm e^{\mp \alpha_\pm x}, \quad \pm x \geq 0, \quad (\text{IV.2})$$

$f_\pm(x, \sigma)$ est analytique dans $\left\{ \sigma \in \mathbb{C}, \text{Im } \sigma > -\frac{1}{2} \alpha_\pm \right\}$. Si V est un potentiel borné à support compact, f_\pm sont des fonctions entières de σ .

Remarque IV.1. — Dans le cas des potentiels $V_{l,s}$, $\frac{1}{2} \alpha_-$ est la gravité de surface à l'horizon du trou noir et on a :

$$\alpha_- = 1, \quad \alpha_+ = 0. \quad (\text{IV.3})$$

Si la constante cosmologique est non nulle (trou noir de De Sitter-Schwarzschild ou De Sitter-Reissner-Nördström) α_+ est strictement positif et les potentiels $V_{l,s}$ sont aussi exponentiellement décroissants au voisinage de l'horizon cosmologique ce qui assure l'analyticité de la matrice de diffraction dans la bande :

$$\left\{ \sigma \in \mathbb{C}, |\text{Im } \sigma| < \frac{1}{2} \text{Min}(\alpha_+, \alpha_-) \right\}. \quad (\text{IV.4})$$

Pour étendre le domaine d'analyticité de $f_\pm(x, \sigma)$ on utilise les propriétés analytiques du potentiel V . Dans l'étude des trous noirs, il est donc

nécessaire de considérer un prolongement analytique de la fonction inverse de Regge-Wheeler :

$$x \rightarrow r = r(x); \quad 1 < r < \infty \Rightarrow x = r + \text{Log}(r - 1). \quad (\text{IV.5})$$

PROPOSITION IV.2. — *L'application $r(x)$, définie continue de \mathbb{R}_x sur $]1, +\infty[$, admet un prolongement holomorphe dans un domaine :*

$$\{x \in \mathbb{C}, |\text{Re } x| > A\}, \quad A > 0, \quad (\text{IV.6})$$

et vérifie :

$$r(x) = 1 + e^{x-1} + o(e^x), \quad \text{Re } x \rightarrow -\infty, \quad (\text{IV.7})$$

$$r(x) = x + o(x), \quad \text{Re } x \rightarrow +\infty. \quad (\text{IV.8})$$

Remarque IV.2. — On obtient $r(x)$ sous forme de séries absolument convergentes du type :

$$\text{Re } x < -A, \quad r = 1 + e^{x-1} + \sum_{k=2}^{\infty} C_k e^{kx}, \quad (\text{IV.9})$$

$$\begin{aligned} \text{Re } x > A, \quad r &= x - \text{Log}(x-1) \\ &+ \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} C_{p,q} (x-1)^{-p-q-1} [\text{Log}(x-1)]^{q+1}. \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Les propriétés (IV.6, IV.7, IV.8) assurent l'existence d'un prolongement analytique des potentiels $V_{l,s}$:

PROPOSITION IV.3. — *Pour tout entier l et tout réel s , il existe $B > 0$ tel que le potentiel $V_{l,s}$ satisfasse :*

$$\left. \begin{aligned} &(\text{i}) \text{ V est continu sur } \mathbb{R} \cup \{x \in \mathbb{C}, |\text{Re } x| \geq B\} \text{ analytique} \\ &\text{à l'intérieur, et pour tout } \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right[\text{ on a :} \\ &(\text{ii}) \int_{\rho > 0} |V(\pm B \pm \rho e^{i\theta})| d\rho < +\infty \\ &(\text{iii}) \sup_{|\alpha| \leq |\theta|} |\rho V(\rho e^{i\alpha})| \rightarrow 0, \rho \in \mathbb{R}, \rho \rightarrow \pm\infty. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.11})$$

Par une rotation du chemin d'intégration de l'intégrale de (IV.1), on établit le résultat fondamental de cette partie.

THÉORÈME IV.1. — *On suppose que le potentiel V satisfait les hypothèses (IV.2) et (IV.11). Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, $f_-(x, \sigma)$ est analytique dans $\{\sigma \in \mathbb{C}, \sigma \neq \lambda i, \lambda \in]-\infty, -\alpha_-/2]\}$ et $f_+(x, \sigma)$ est analytique dans $\{\sigma \in \mathbb{C}, \sigma \neq \lambda i, \lambda \in]-\infty, -\alpha_+/2]\}$.*

Compte tenu de (IV.3), la matrice d'Heisenberg associée à la diffraction d'un champ sans masse de spin s par un trou noir de Schwarzschild est méromorphe dans $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$; ses singularités dans $\mathbb{C}^- \setminus i\mathbb{R}^-$ sont les pôles

du coefficient de transmission $T(\sigma)$, c'est-à-dire les résonances ou fréquences propres du trou noir.

Preuve de la proposition IV. 1. — Les fonctions de Jost f_{\pm} étant définies par (III. 18) et (III. 19), on considère la suite $m_{\pm}^N(x, \sigma)$ donnée par :

$$m_{\pm}^0(x, \sigma) = 0 \quad (\text{IV. 12})$$

$$0 \leq N, \quad m_{\pm}^{N+1}(x, \sigma) = 1 + \int_{\pm\infty}^x W(x, y; \sigma) m_{\pm}^N(y, \sigma) dy, \quad (\text{IV. 13})$$

où

$$W(x, y; \sigma) = \frac{1}{i\sigma} (1 - e^{2i\sigma|x-y|}) V(y). \quad (\text{IV. 14})$$

x étant fixé, les hypothèses (IV. 2) et [IV. 11, (ii)] avec $\theta=0$ assurent que $W(x, y; \sigma)$ est une fonction de σ à valeur dans $L^1(\mathbb{R}_y^{\pm})$ qui est holomorphe sur $\left\{ \sigma \in \mathbb{C}, \text{Im } \sigma > -\frac{1}{2}\alpha_{\pm} \right\}$ continue sur $\left\{ \sigma \in \mathbb{C}^*, \text{Im } \sigma \geq 0 \right\}$. Les fonctions de σ , $m_{\pm}^N(x, \sigma)$ sont donc holomorphes et continues sur ces mêmes domaines et y convergent localement uniformément, ce qui assure la même régularité aux limites $m_{\pm}(x, \sigma)$.

Q.E.D.

Preuve de la proposition IV. 2. — La fonction $x(r) = r + \text{Log}(r-1)$ étant analytique strictement croissante de $]1, +\infty[$, sur \mathbb{R}_x , l'équation

$$x = r + \text{Log}(r-1) \quad (\text{IV. 15})$$

admet une unique solution $r(x)$ qui définit une fonction analytique sur \mathbb{R}_x . Pour trouver un prolongement analytique de cette fonction à un domaine de type (IV. 6), nous nous ramenons par des changements de variables à des cas étudiés par N. G. de Bruijn dans [4]. Tout d'abord en posant

$$X = r - 1, \quad T = e^{1-x} \quad (\text{IV. 16})$$

l'équation (IV. 15) devient

$$X e^X = T^{-1}. \quad (\text{IV. 17})$$

La formule d'inversion de Lagrange ([4], p. 23) permet d'exprimer X en fonction de T pour T assez grand; on obtient :

$$r = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^{k-1} e^{-k} \frac{e^{kx}}{k!} \quad (\text{IV. 18})$$

et pour $A > 0$ suffisamment grand, cette série converge absolument pour $\text{Re } x < -A$ ce qui assure le prolongement analytique de $r(x)$ à ce domaine.

A présent on pose :

$$X = r - 1, \quad T = e^{x-1}. \quad (\text{IV. 19})$$

L'équation (IV. 15) devient

$$X e^X = T. \tag{IV. 20}$$

La solution $X(T)$ de (IV. 20) s'exprime sous forme d'une série ([4], p. 28):

$$X = \text{Log } T - \text{Log } \text{Log } T + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{k,m} (\text{Log } \text{Log } T)^{m+1} \cdot (\text{Log } T)^{-k-m-1} \tag{IV. 21}$$

qui converge absolument pour T assez grand : il existe $a > 0$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |C_{k,m}| a^{m+1} a^k < +\infty. \tag{IV. 22}$$

En choisissant la détermination principale du logarithme complexe, on voit alors que la série (IV. 21) converge dès que $\Re e T > A_1$, A_1 assez grand. Finalement, il existe $A > 0$ tel que pour $x > A$ la solution r de (IV. 15) s'écrit :

$$r = x - \text{Log}(x-1) + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{k,m} \left[\frac{\text{Log}(x-1)}{x-1} \right]^{m+1} \left[\frac{1}{x-1} \right]^k \tag{IV. 23}$$

où cette série converge absolument pour $\Re e x > A$ définissant ainsi le prolongement analytique de $r(x)$ à ce domaine. Les comportements asymptotiques (IV. 7) et (IV. 8) découlent immédiatement des représentations (IV. 18) et (IV. 23).

Q.E.D.

Preuve de la proposition IV. 3. — L'analyticité de $V_{l,s}$ est une conséquence directe de la proposition précédente et de (I. 2).

Le développement (IV. 18) assure que pour $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, $\rho \in \mathbb{R}^-$, on a :

$$|V_{l,s}(\rho e^{i\theta})| \leq C e^{\rho \cos \theta}, \quad \rho < -A/\cos \theta. \tag{IV. 24}$$

D'autre part (IV. 23) donne

$$|V_{l,s}(\rho e^{i\theta})| \leq C \rho^{-2}, \quad \rho \geq A/\cos \theta. \tag{IV. 25}$$

(IV. 24) et (IV. 25) entraînent les assertions (ii) et (iii) de (IV. 11).

Q.E.D.

Preuve du théorème IV. 1. — On pose :

$$m_+(x, \sigma) = e^{-i\sigma x} f_+(x, \sigma). \tag{IV. 26}$$

Pour $\sigma \in \mathbb{R}^*$, m_+ est la solution de l'équation intégrale

$$m_+(x, \sigma) = 1 - \int_x^{\infty} W(x, y; \sigma) m_+(y, \sigma) dy \tag{IV. 27}$$

où

$$W(x, y; \sigma) = \frac{1}{2i\sigma} (1 - e^{2i\sigma(y-x)}) \cdot V(y). \quad (\text{IV. 28})$$

On définit par récurrence la suite $m_n(x, \sigma)$, $x \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^*$, donnée par :

$$m_0(x, \sigma) = 1 \quad (\text{IV. 29})$$

$$m_{n+1}(x, \sigma) = - \int_x^\infty W(x, y; \sigma) m_n(y, \sigma) dy. \quad (\text{IV. 30})$$

L'hypothèse (IV. 11) implique que pour $\sigma \in \mathbb{R}^*$

$$|W(x, y; \sigma)| \leq \frac{1}{|\sigma|} |V(y)| \in L^1(]x, +\infty[); \quad (\text{IV. 31})$$

cette estimation assure que l'intégrale (IV. 30) est convergente et une récurrence aisée donne

$$|m_n(x, \sigma)| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_x^\infty |V(y)| dy \right)^n. \quad (\text{IV. 32})$$

On pose alors

$$m_+(x, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n(x, \sigma) \quad (\text{IV. 33})$$

et $m_+(x, \sigma)$ vérifie

$$x \in \mathbb{R}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^*, \quad |m_+(x, \sigma)| \leq \exp \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_x^\infty |V(y)| dy \right). \quad (\text{IV. 34})$$

Nous prolongeons maintenant $m_+(x, \sigma)$ pour $|\operatorname{Re} x| > B$ et $\sigma \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Étant donné $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, on note $\Gamma_\theta(x)$ pour $x \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Re} x| > B$, le chemin défini par la figure 1.

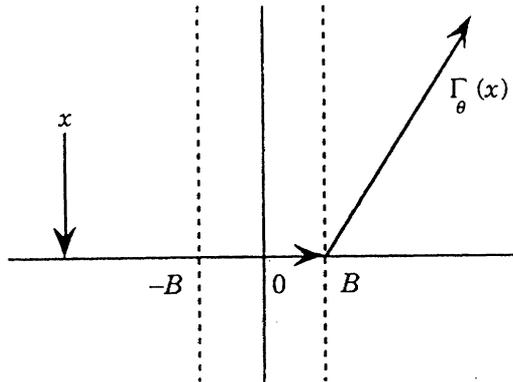


FIG. 1

Pour tout $\sigma \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}$ et $y \in \mathbb{R} \cup \{y \in \mathbb{C}; |\Re y| > B\}$ on a

$$|W(x, y; \sigma)| \leq \frac{1}{|\sigma|} |e^{2i\sigma(y-x)}| |V(y)|. \tag{IV.35}$$

L'hypothèse (IV.11) entraîne alors que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \cup \{x \in \mathbb{C}; |\Re x| > B\} \tag{IV.36}$$

$$\forall \sigma = \rho e^{i\varphi}, \quad 0 < \rho, \quad -\varphi \leq \theta \leq \pi - \varphi \tag{IV.37}$$

$$\int_{\Gamma_\theta(x)} |W(x, y; \sigma)| |dy| \leq \frac{1}{|\sigma|} \int_{\Gamma_\theta(x)} |V(y)| |dy| < \infty. \tag{IV.38}$$

Sous les conditions (IV.36) et (IV.37) on définit la suite $m_n(x, \sigma; \theta)$

$$m_0(x, \sigma; \theta) = 1 \tag{IV.39}$$

$$m_{n+1}(x, \sigma; \theta) = - \int_{\Gamma_\theta(x)} W(x, y; \sigma) m_n(y, \sigma; \theta) dy. \tag{IV.40}$$

L'inégalité (IV.38) assure que cette suite est bien définie et on vérifie par récurrence que :

$$|m_n(x, \sigma; \theta)| \leq \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_{\Gamma_\theta(x)} |V(y)| |dy| \right)^n, \tag{IV.41}$$

en notant que si (IV.41) est satisfaite, alors

$$\begin{aligned} |m_{n+1}(x, \sigma; \theta)| &\leq \frac{1}{n!} \frac{1}{|\sigma|} \int_{\Gamma_\theta(x)} |V(y)| \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_{\Gamma_\theta(y)} |V(z)| |dz| \right)^n |dy| \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_{\Gamma_\theta(x)} |V(y)| |dy| \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

On pose alors

$$m_+(x, \sigma; \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n(x, \sigma; \theta). \tag{IV.42}$$

$m_+(x, \sigma; \theta)$ est solution de l'équation intégrale :

$$m_+(x, \sigma; \theta) = 1 - \int_{\Gamma_\theta(x)} W(x, y; \sigma) m_+(y, \sigma; \theta) dy. \tag{IV.43}$$

Les fonctions $m_n(x, \sigma; \theta)$ sont continues par rapport à (x, σ) dans le domaine défini par (IV.36), (IV.37) et le théorème de Cauchy entraîne que $m_n(x, \sigma; \theta)$ est séparément analytique par rapport à x et σ ; il en est de même pour la limite $m_+(x, \sigma; \theta)$. Maintenant une seconde application

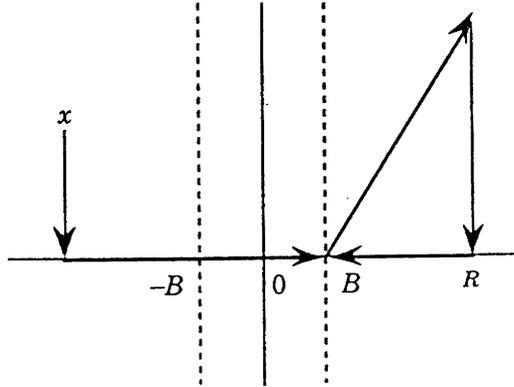


FIG. 2

du théorème de Cauchy au contour de la figure 2 montre, en faisant tendre R vers l'infini et en tenant compte de [IV. 11 (iii)] que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^*, \quad m_n(x, \sigma; \theta) = m_n(x, \sigma). \quad (\text{IV. 44})$$

x étant un réel fixé, $m_+(x, \sigma; \theta)$ est donc le prolongement analytique de $m_+(x, \sigma)$ au domaine (IV. 37). φ étant arbitraire dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, la fonction de σ , $m_+(x, \sigma)$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$. Enfin, si le potentiel V satisfait (IV. 2), la proposition (IV. 1) assure l'analyticité des fonctions de Jost dans $\mathbb{C} \setminus i \left] -\infty, -\frac{1}{2}\alpha_+ \right[$.

Q.E.D.

V. PARADIGME DE LA MEMBRANE: APPROXIMATION PAR AMORTISSEMENT ET TRONCATURE

Quand le potentiel V est à support compact dans $[a, b]$, les résonances coïncident avec les valeurs propres du générateur du fameux semi-groupe Z de Lax-Phillips [20]. Nous montrons que le *Paradigme de la Membrane* [9], [23] donne une interprétation simple de ce semi-groupe abstrait: Z est unitairement équivalent au propagateur du problème mixte hyperbolique:

$$\partial_t^2 \Phi - \partial_x^2 \Phi + V(x) \Phi = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x \in]a, b[, \quad (\text{V. 1})$$

$$\partial_t \Phi(t, a) - \partial_x \Phi(t, a) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (\text{V. 2})$$

$$\partial_t \Phi(t, b) + \partial_x \Phi(t, b) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (\text{V. 3})$$

La condition (V. 2) est la condition d'impédance ou de radiation rentrante imposée sur la membrane ou horizon élargi $\{r=r(a)\} \times S^2$ et (V. 3) est

la condition sortante analogue sur un « horizon cosmologique rétréci » $\{r=r(b)\} \times S^2$. On en déduit qu'une solution Φ de l'équation (I.1) dont le support des données initiales est inclus dans $]a, b[$ coïncide avec la solution de (V.1, 2, 3) de mêmes données. Ainsi l'étude de la diffraction par un trou noir dans le cadre du formalisme de la membrane est ramenée à l'étude de la diffraction par les potentiels tronqués :

$$V_{l,s}^{a,b}(x) = \chi_{[a,b]}(x) \cdot V_{l,s}(x). \tag{V.4}$$

Soulignons que l'ensemble $\Sigma^{a,b}$ des résonances associées à $V_{l,s}^{a,b}$ dépend non seulement du potentiel V mais aussi, de façon essentielle, de la troncature $[a, b]$. Comme l'a noté R. G. Newton [28], une troncature brutale du potentiel ne permet pas d'obtenir des informations sur les singularités de la matrice de diffraction à partir des matrices associées aux potentiels tronqués. En revanche, nous montrons à la fin de cette section que les résonances peuvent être approchées si l'on amortit le potentiel avant de le tronquer.

On établit tout d'abord la convergence des opérateurs de diffraction :

THÉORÈME V.1. — Soient V et V_n des potentiels satisfaisant l'hypothèse (I.13) et S et S_n les opérateurs de diffraction qui leur sont respectivement associés par la formule (II.36); si $V_n \rightarrow V$ dans $L^1(\mathbb{R})$ quand $n \rightarrow \infty$, alors $S_n f \rightarrow S f$ dans \mathcal{H}_0 pour tout f dans \mathcal{H}_0 .

Remarque V.1. — Comme nous l'avons souligné dans la remarque III.1, l'hypothèse (I.13) sert à construire les opérateurs d'onde W_{\pm} alors qu'il suffit que V soit dans $L^1(\mathbb{R})$ pour pouvoir définir l'opérateur de diffraction S par la formule (III.14); le théorème V.1 assure donc la continuité de l'application : $V \in L^1(\mathbb{R}) \rightarrow S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$.

Pour développer l'analogie en dimension 1 de la théorie élaborée par Lax-Phillips en dimension impaire supérieure ou égale à 3, on introduit pour $\rho \geq 1$ fixé, les espaces des champs sortants, D_+^{ρ} , et rentrants D_-^{ρ} :

$$D_+^{\rho} = \{ f \in \mathcal{H}_+, f|_{[-\rho, \rho]} = 0, f'_1(x) \pm f_2(x) = 0, \pm x \geq \rho \}, \tag{V.5}$$

$$D_-^{\rho} = \{ f \in \mathcal{H}_+, f|_{[-\rho, \rho]} = 0, f'_1(x) \mp f_2(x) = 0, \pm x \geq \rho \}, \tag{V.6}$$

où \mathcal{H}_+ est l'espace de Hilbert défini par (II.8) sous l'hypothèse

$$V \in L^{\infty}(\mathbb{R}), \quad |x| \geq \rho, \quad V(x) = V_+(x) = V_-(x) = 0. \tag{V.7}$$

En posant

$$\mathcal{H}^{\rho} = \{ f \in \mathcal{H}_+, f'_1(x) = f_2(x) = 0, \pm x \geq \rho \}, \tag{V.8}$$

on montre que \mathcal{H}_+ admet la décomposition en somme directe

$$\mathcal{H}^{\rho} = D_+^{\rho} \oplus D_-^{\rho} \oplus \mathcal{H}^{\rho}; \tag{V.9}$$

cette somme est orthogonale pour les formes E_+ , E_0 , et E ; on note P_{\pm}^{ρ} le projecteur sur $D_{\mp}^{\rho} \oplus \mathcal{H}^{\rho}$:

$$f \in \mathcal{H}_+, \quad f = f_+^{\rho} + f_-^{\rho} + k^{\rho}, \quad f_{\pm}^{\rho} \in D_{\pm}^{\rho}, \quad k^{\rho} \in \mathcal{H}^{\rho}, \quad P_{\pm}^{\rho} f = f_{\mp}^{\rho} + k^{\rho}. \tag{V.10}$$

On introduit alors l'opérateur Z^p

$$Z^p(t) = P_+^p U(t) P_-^p, \quad 0 \leq t. \quad (\text{V. 11})$$

THÉORÈME V.2. — On suppose que le potentiel V satisfait l'hypothèse (V.7).

(i) $Z^p(t)$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs sur \mathcal{H}_+ qui invarie \mathcal{H}^p et vérifie :

$$\|Z^p(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_+)} \leq C e^{kt}, \quad t \geq 0, \quad (\text{V. 12})$$

$$E(Z^p(t)f) \leq E(f), \quad t \geq 0, \quad f \in \mathcal{H}_+. \quad (\text{V. 13})$$

(ii) $Z^p(t)$ est un opérateur compact pour $t \geq 2\rho$.

(iii) Le spectre Σ^p de son générateur infinitésimal B^p se compose d'une infinité dénombrable de valeurs propres simples et on a :

$$\mu \in \Sigma^p \Leftrightarrow W(i\mu) = 0; \quad (\text{V. 14})$$

la fonction propre $f(x, \mu)$ associée est définie par :

$$\left. \begin{aligned} \pm x > \rho &\Rightarrow f(x, \mu) = {}^t(f_+(\pm\rho, i\mu), 0) \\ |x| \leq \rho &\Rightarrow f(x, \mu) = {}^t(f_+(x, i\mu), \mu f_+(x, i\mu)) \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 15})$$

où $f_+(x, i\mu)$ est la fonction de Jost pour la fréquence $i\mu$ qui est une valeur propre, un état antiborné, une résonance ou le niveau virtuel nul.

Pour résoudre le problème mixte (V.1, V.2, V.3) (avec $a = -\rho$, $b = \rho$) on introduit l'espace \mathcal{H}_+^p :

$$\mathcal{H}_+^p = H^1(-\rho, \rho] \times L^2(-\rho, \rho] \quad (\text{V. 16})$$

muni de la norme :

$$E_+^p(f^p) = \int_{]-\rho, \rho[} \left| \frac{d}{dx} f_1^p \right|^2 + |f_2^p|^2 + [V_+(x) + \chi_{[0, \rho]}(x)] |f_1^p|^2 dx, \\ f^p = {}^t(f_1^p, f_2^p). \quad (\text{V. 17})$$

L'application de restriction I^p :

$$I^p: \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_+^p, \quad f \in \mathcal{H}_+ \rightarrow I^p f = f|_{]-\rho, \rho[} \in \mathcal{H}_+^p \quad (\text{V. 18})$$

est une isométrie de \mathcal{H}^p sur \mathcal{H}_+^p .

On définit au sens des distributions sur $]-\rho, \rho[$, l'opérateur

$$A^p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -L_V & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V. 19})$$

et l'injection de Sobolev

$$n \geq 1, \quad H^n(-\rho, \rho] \hookrightarrow C^{n-1}([-\rho, \rho]) \quad (\text{V. 20})$$

permet de spécifier le domaine :

$$D(A^p) = \{ f^p \in \mathcal{H}_+^p; A^p f^p \in \mathcal{H}_+^p; (f_1^p)'(\pm\rho) \pm f_2^p(\pm\rho) = 0 \}. \quad (\text{V. 21})$$

L'équivalence entre le formalisme de la membrane et la théorie du semi-groupe Z^p est exprimée par le :

THÉORÈME V.3. — *L'opérateur A^p de domaine $D(A^p)$ engendre un semi-groupe $U^p(t)$ fortement continu sur \mathcal{H}^p_+ et le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{H}^p & \xrightarrow{I^p} & \mathcal{H}^p_+ \\
 \downarrow Z^p(t) & & \downarrow U^p(t) \\
 \mathcal{H}^p & \xrightarrow{I^p} & \mathcal{H}^p_+
 \end{array} \quad (t \geq 0) \quad (V.22)$$

Nous pouvons à présent décrire l'ensemble des résonances et obtenir une décomposition spectrale des solutions de l'équation (I.1) quand le potentiel est à support compact.

THÉORÈME V.4. — *On suppose que le potentiel $V \neq 0$ vérifie (V.7). Alors le Wronskien $W(\sigma)$ donné par (I.8) est une fonction entière dont l'ensemble des zéros se compose :*

(i) *d'un nombre au plus fini de valeurs propres σ_j , $-N \leq j \leq -1$, telles que :*

$$-N \leq j \leq -1, \quad \text{Im } \sigma_j > 0, \quad \text{Re } \sigma_j = 0; \quad (V.23)$$

(ii) *éventuellement du niveau virtuel nul :*

$$\sigma_0 = 0; \quad (V.24)$$

σ_j , $-N \leq j \leq 0$, *sont des zéros simples de W et si V est positif il n'y a ni valeur propre ni niveau virtuel nul;*

(iii) *d'un ensemble infini dénombrable σ_j , $1 \leq j$ d'états antibornés et de résonances :*

$$1 \leq j, \quad \text{Im } \sigma_j < 0, \quad (V.25)$$

qui vérifie :

$$\forall \gamma > 0, \quad \text{Card} \{ \sigma_j / \text{Im } \sigma_j \geq -\gamma \} < +\infty. \quad (V.26)$$

On ordonne les fréquences σ_j par partie imaginaire décroissante :

$$\text{Im } \sigma_{j+1} \leq \text{Im } \sigma_j. \quad (V.27)$$

Alors pour tout $n \geq -N$, $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, il existe $C(n, \varepsilon, \rho) > 0$, tel que pour tout $f = (f_1, f_2)$ dans \mathcal{H}^p_+ vérifiant :

$$\text{supp } f \subset [-\rho, \rho], \quad (V.28)$$

la solution Φ de l'équation (I.1) de données initiales

$$\Phi(0, x) = f_1(x), \quad \partial_t \Phi(0, x) = f_2(x) \quad (\text{V.29})$$

satisfait pour $t \geq 0$

$$\left| \Phi(t, x) - \sum_{j=-N}^n e^{-i\sigma_j t} C_j f_+(x, \sigma_j) \right| \leq C(n, \varepsilon, \rho) \cdot (1 + |x|)^{1/2} |e^{(-i\sigma_{n+1} + \varepsilon)t}| \quad (\text{V.30})$$

où

$$C_j = \text{Résidu} \left(\frac{1}{W(\sigma)} \int_{\mathbb{R}} f_-(x, \sigma) (i\sigma f_1(x) - f_2(x)) dx; \sigma = \sigma_j \right). \quad (\text{V.31})$$

Remarque V.2. — L'existence d'une infinité de résonances pour l'équation de Schrödinger sur la demi-droite a été établie par Regge [27], [36] sous l'hypothèse superflue $V(x) \approx (x - \rho)^\lambda$, $0 < \lambda$, $x \rightarrow \rho^-$. Nous établissons ce résultat sous la seule hypothèse (V.7) à l'aide des théorèmes de Hadamard, Paley-Wiener et Titchmarsh. On renvoie aussi à M. Zworski [40] qui a étudié par une méthode analogue la répartition asymptotique des pôles.

Remarque V.3. — Les valeurs propres $(\sigma_j)_{-N \leq j \leq -1}$ n'apparaissent dans la formule asymptotique (V.30) que sous la forme des modes exponentiellement croissants

$$e^{-i\sigma_j t} f_+(x, \sigma_j); \quad (\text{V.32})$$

les modes évanescents

$$e^{i\sigma_j t} f_+(x, \sigma_j), \quad t \geq 0 \quad (\text{V.33})$$

ne contribuent pas à la décomposition spectrale (V.30) de Φ même si la donnée initiale excite ce mode, *i. e.*

$$E(f, f_j^+) < 0, \quad f_j^+ = {}^t(f_+(\cdot, \sigma_j), i\sigma_j f_+(\cdot, \sigma_j)). \quad (\text{V.34})$$

Remarque V.4. — Si V est positif, l'estimation (V.30) assure une décroissance exponentielle de $\Phi(t)$ dominée par la partie imaginaire de la première résonance σ_1 .

Enfin nous justifions l'approximation par troncature dans l'étude des résonances. Étant donné un potentiel V et une partie E de \mathbb{C} , on note $\mathcal{R}(V, E)$ l'ensemble des résonances associées à V incluses dans E et pour $\varepsilon, \gamma > 0$, $a < b$, $V_{\gamma, \varepsilon}^{a, b}$ désigne le potentiel amorti et tronqué :

$$V_{\gamma, \varepsilon}^{a, b}(x) = \chi_{[a, b]}(x) \cdot e^{-\varepsilon|x|^\gamma} \cdot V(x). \quad (\text{V.35})$$

THÉORÈME V.5. — *On suppose que le potentiel V satisfait les hypothèses de courte portée (I.13) et d'analyticité (IV.2) et (IV.11). Alors pour tout*

$\eta > 0, \gamma > 1$, et tout compact K d'intérieur \mathring{K} tel que :

$$K \subset \left\{ \sigma \in \mathbb{C}^*, -\frac{\pi}{2\gamma} < \text{Arg } \sigma < \pi + \frac{\pi}{2\gamma} \right\} \cup \left\{ \sigma \in \mathbb{C}, \text{Im } \sigma > -\frac{1}{2} \text{Min}(\alpha_-, \alpha_+) \right\}, \quad (\text{V. 36})$$

il existe $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, il existe $A > 0, B > 0$ vérifiant :

$$\forall a < -A, \forall b > B, \quad \text{Card } \mathcal{R}(V, \mathring{K}) = \text{Card } \mathcal{R}(V_{\gamma, \varepsilon}^a, \mathring{K}) \quad (\text{V. 37})$$

$$\forall \sigma \in \mathcal{R}(V, \mathring{K}), \exists \sigma_{\gamma, \varepsilon}^{a, b} \in \mathcal{R}(V_{\gamma, \varepsilon}^a, \mathring{K}), \quad |\sigma - \sigma_{\gamma, \varepsilon}^{a, b}| < \eta; \quad (\text{V. 38})$$

Si K est inclus dans $\left\{ \sigma \in \mathbb{C}, \text{Im } \sigma > -\frac{1}{2} \text{Min}(\alpha_-, \alpha_+) \right\}$ on peut prendre $\varepsilon_0 = \varepsilon = 0$.

Remarque V.5. — Ce résultat basé sur le théorème d'Hürwitz, fonde l'approche par troncature de l'étude des résonances; il est malheureusement insuffisant pour assurer que $\mathcal{R}(V, \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-)$ est non vide quoique pour tout $\gamma, \varepsilon, a, b$, l'ensemble $\mathcal{R}(V_{\gamma, \varepsilon}^a, \mathbb{C})$ soit infini.

Preuve du théorème V.1. — Par le théorème de représentation spectrale III.2, le problème se ramène à prouver que, pour tout F dans $L^2(\mathbb{R}_\sigma \times \{-1, 1\}_\omega)$, on a :

$$\mathcal{S}_n F \rightarrow \mathcal{S} F \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}_\sigma \times \{-1, 1\}_\omega), \quad n \rightarrow \infty \quad (\text{V. 39})$$

où \mathcal{S}_n et \mathcal{S} désignent respectivement les matrices d'Heisenberg associées aux potentiels V_n et V . Grâce à la relation d'unitarité (III.28), il suffit de considérer le cas :

$$F \in C_0^\infty((\mathbb{R} \setminus \{0\})_\sigma \times \{-1, 1\}_\omega). \quad (\text{V. 40})$$

Les fonctions de Jost f_\pm^n relatives à V_n vérifient pour $\sigma \in \mathbb{R}^*$:

$$f_\pm^n(x, \sigma) = e^{\pm i\sigma x} + \int_{\pm\infty}^x \frac{\sin \sigma(x-y)}{\sigma} V_n(y) f_\pm^n(y, \sigma) dy, \quad (\text{V. 41})$$

$$\frac{d}{dx} f_\pm^n(x, \sigma) = \pm i\sigma e^{\pm i\sigma x} + \int_{\pm\infty}^x \cos \sigma(x-y) V_n(y) f_\pm^n(y, \sigma) dy, \quad (\text{V. 42})$$

et si f_\pm est la fonction de Jost pour V , on a :

$$f_\pm^n(x, \sigma) - f_\pm(x, \sigma) = \int_{\pm\infty}^x \frac{\sin \sigma(x-y)}{\sigma} [V^n(y) - V(y)] f_\pm^n(y, \sigma) dy + \int_{\pm\infty}^x \frac{\sin \sigma(x-y)}{\sigma} V(y) [f_\pm^n(y, \sigma) - f_\pm(y, \sigma)] dy, \quad (\text{V. 43})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f_{\pm}^n(x, \sigma) - \frac{d}{dx} f_{\pm}(x, \sigma) &= \int_{\pm\infty}^x \cos \sigma(x-y) [V^n(y) - V(y)] f_{\pm}^n(y, \sigma) dy \\ &+ \int_{\pm\infty}^x \cos \sigma(x-y) V(y) [f_{\pm}^n(y, \sigma) - f_{\pm}(y, \sigma)] dy. \end{aligned} \quad (\text{V. 44})$$

Par application directe du lemme de Gronwall aux équations (V. 41), (V. 42), et (V. 43) on obtient :

$$\|f_{\pm}^n(\cdot, \sigma)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_x)} \leq \exp\left(\frac{1}{\sigma} \|V^n\|_{L^1}\right), \quad (\text{V. 45})$$

$$\left\| \frac{d}{dx} f_{\pm}^n(\cdot, \sigma) \right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_x)} \leq \sigma \exp\|V^n\|_{L^1}, \quad (\text{V. 46})$$

$$\|f_{\pm}^n(\cdot, \sigma) - f_{\pm}(\cdot, \sigma)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_x)} \leq \frac{1}{\sigma} \|V^n - V\|_{L^1} \exp\left(\frac{2}{\sigma} \|V^n\|_{L^1}\right); \quad (\text{V. 47})$$

on déduit de (V. 44), (V. 45) et (V. 47) que :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dx} f_{\pm}^n(\cdot, \sigma) - \frac{d}{dx} f_{\pm}(\cdot, \sigma) \right\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}_x)} \\ \leq \|V^n - V\|_{L^1} \left(1 + \frac{1}{\sigma} \|V\|_{L^1}\right) \exp\left(\frac{2}{\sigma} \|V^n\|_{L^1}\right). \end{aligned} \quad (\text{V. 48})$$

On conclut de (V. 47) et (V. 48) que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n(\sigma, \omega, \eta) \rightarrow \mathcal{S}(\sigma, \omega, \eta) \quad \text{dand } L_{\text{loc}}^{\infty}[(\mathbb{R} \setminus \{0\})_{\sigma}] \\ \times \{-1, 1\}_{\omega} \times \{-1, 1\}_{\eta} \end{aligned} \quad (\text{V. 49})$$

et si F satisfait (V. 40)

$$\mathcal{S}_n F \rightarrow \mathcal{S} F \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}_{\sigma} \times \{-1, 1\}_{\omega}). \quad (\text{V. 50})$$

Q.E.D.

Preuve du théorème V.2. — (i) Nous commençons par légitimer la décomposition (V.9). Pour $f = {}^t(f_1, f_2)$ dans \mathcal{H}_+ , on définit $f_{\pm}^{\rho} = {}^t(f_1^{\pm}, f_2^{\pm})$ et $k^{\rho} = {}^t(k_1, k_2)$ en posant :

$$\begin{aligned} \rho < x, \quad f_1^{\pm}(x) &= \frac{1}{2} \left[f_1(x) - f_1(\rho) \mp \int_{\rho}^x f_2(t) dt \right], \quad k_1(x) = f_1(\rho), \\ f_2^{\pm}(x) &= \frac{1}{2} [f_2(x) \mp f_1'(x)], \quad k_2(x) = 0, \end{aligned} \quad (\text{V. 51})$$

$$\begin{aligned} x < -\rho, \quad f_1^{\pm}(x) &= \frac{1}{2} \left[f_1(x) - f_1(-\rho) \pm \int_{-\rho}^x f_2(t) dt \right], \\ k_1(x) &= f_1(-\rho), \quad (\text{V. 52}) \\ f_2^{\pm}(x) &= \frac{1}{2} [f_2(x) \pm f_1'(x)], \quad k_2(x) = 0, \end{aligned}$$

$$|x| < \rho, \quad f_1^\pm(x) = f_2^\pm(x) = 0, \quad k_1(x) = f_1(x), \quad k_2(x) = f_2(x). \quad (V.53)$$

On vérifie aisément que :

$$f_\pm^p \in D_\pm^p, \quad k^p \in \mathcal{H}^p, \quad f = f_+^p + f_-^p + k^p. \quad (V.54)$$

A présent, remarquons que :

$$0 \leq t, \quad U(t)f_+^p = U_0(t)f_+^p \in D_+^p; \quad (V.55)$$

on en déduit que :

$$0 \leq t, \quad Z^p(t)f = P_+^p U(t)k^p. \quad (V.56)$$

D'autre part, on a :

$$\pm x > \rho, \quad [k^p(x)]_1' = [k^p(x)]_2 = 0, \quad (V.57)$$

et, pour $|x| > \rho$, $U(t)k^p$ est une solution libre :

$$\pm x > \rho \Rightarrow (\partial_t \mp \partial_x) \{ [U(t)k^p]_2 \pm [U(t)k^p]_1' \} = 0. \quad (V.58)$$

On conclut de (V.57) et (V.58) que :

$$0 \leq t, \quad \pm x > \rho, \quad [U(t)k^p]_2 \pm [U(t)k^p]_1' = 0 \quad (V.59)$$

c'est-à-dire

$$U(t)k^p \in D_+^p \oplus \mathcal{H}^p \quad (V.60)$$

et

$$Z^p(t)f \in \mathcal{H}^p. \quad (V.61)$$

Maintenant pour $0 \leq t, s$ on a :

$$\begin{aligned} Z^p(s)Z^p(t)f &= P_+^p U(s)P_+^p U(t)k^p = Z^p(s+t)f + P_+^p U(s)[P_+^p - 1]U(t)k^p \\ &= Z^p(s+t)f + P_+^p U_0(s)[P_+^p - 1]U(t)k^p = Z^p(s+t)f. \end{aligned} \quad (V.62)$$

$Z^p(t)$ est donc un semi-groupe sur \mathcal{H}_+ invariant \mathcal{H}^p ; sa continuité et l'estimation (V.12) sont conséquences de la proposition II.2. Pour établir l'inégalité (V.13) on introduit l'énergie locale

$$E_p(f) = \int_{1-\rho, \rho t} (|f_1'(x)|^2 + |f_2(x)|^2 + V(x)|f_1(x)|^2) dx. \quad (V.63)$$

Il vient :

$$E(Z^p(t)f) = E_p(U(t)f) \leq E(U(t)f) = E(f). \quad (V.64)$$

Q.E.D.

(ii) A présent, remarquons que pour $f \in \mathcal{H}_+$, $U_0(t)f$ est solution de l'équation intégrale :

$$U_0(t)f = U_+(t)f - \int_0^t U_+(t-s)\mathcal{V}_+ U_0(s)f ds \quad (V.65)$$

où $U_+(t)$ est le groupe unitaire sur \mathcal{H}_+ défini par le générateur (II. 57) et \mathcal{V}_+ est l'opérateur borné sur \mathcal{H}_+ donné par :

$$f = {}^t(f_1, f_2), \quad \mathcal{V}_+ f = {}^t(0, [V_+(x) + \chi_{[0, 1]}(x)] f_1). \quad (\text{V. 66})$$

Le lemme de Gronwall assure alors que $U_0(t)$ est un groupe fortement continu sur \mathcal{H}_+ vérifiant :

$$\|U_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_+)} \leq C e^{k|t|}. \quad (\text{V. 67})$$

On peut donc exprimer $Z^p(t)$ à l'aide de $U_0(t)$:

$$Z^p(t) = P_+^p U_0(t) P_-^p + \int_0^t P_+^p U_0(t-s) \mathcal{V} U(s) P_-^p ds \quad (\text{V. 68})$$

où \mathcal{V} est l'opérateur :

$$f = {}^t(f_1, f_2), \quad \mathcal{V} f = {}^t(0, V f_1). \quad (\text{V. 69})$$

Pour $f \in \mathcal{H}^p$ on a pour $t \geq 2\rho$

$$P_+^p U_0(t) P_-^p f = {}^t\left(\frac{1}{2}\left[f_1(\rho) + f_1(-\rho) + \int_{-\rho}^{\rho} f_2(y) dy\right], 0\right). \quad (\text{V. 70})$$

Donc $P_+^p U_0(t) P_-^p$ est un opérateur de rang 1 sur \mathcal{H}^p pour $t \geq 2\rho$.

D'autre part, le théorème d'injection compacte de Rellich-Kondrasov implique que l'opérateur \mathcal{V} est compact sur \mathcal{H}_+ . On conclut que $Z^p(t)$ est compact sur \mathcal{H}^p pour $t \geq 2\rho$.

Q.E.D.

(iii) Le générateur infinitésimal B^p de $Z^p(t)$ est donné par la limite :

$$B^p f = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{Z^p(t) f - f}{t}, \quad f \in \mathcal{H}^p; \quad (\text{V. 71})$$

le domaine $D(B^p)$ de B^p est l'ensemble des éléments de \mathcal{H}^p pour lesquels cette limite existe.

LEMME V. 1 :

$$D(B^p) = \left\{ f \in \mathcal{H}^p; f_{|1-\rho, \rho|} \in H^2(]-\rho, \rho[) \cap H^1(]-\rho, \rho]), f_1'(\pm \rho^\mp) \pm f_2(\pm \rho^\mp) = 0 \right\}, \quad (\text{V. 72})$$

$$B^p f = \begin{cases} {}^t(f_2(\rho^-), 0) & \text{pour } x > \rho \\ A f = {}^t(f_2, f_1'' - V f_1) & \text{pour } |x| < \rho \\ {}^t(f_2(-\rho^+), 0) & \text{pour } x < -\rho \end{cases} \quad (\text{V. 73})$$

où on a posé

$$g(\pm \rho^\mp) = \lim_{\substack{x \rightarrow \pm \rho \\ \pm x < \rho}} g(x). \quad (\text{V. 74})$$

Preuve du lemme V. 1. — Soit $k > 0$ tel que :

$$\|U(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_+)} + \|Z^p(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_+)} \leq C e^{kt}, \quad 0 \leq t. \quad (\text{V. 75})$$

On peut appliquer la théorie des semi-groupes de contraction à $e^{-kt}U(t)$ et $e^{-kt}Z^p(t)$. Pour $\lambda > k$ les résolvants suivants sont bien définis :

$$(\lambda - B^p)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} Z^p(t) dt \quad \text{sur } \mathcal{H}^p, \tag{V.76}$$

$$(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U(t) dt \quad \text{sur } \mathcal{H}_+. \tag{V.77}$$

On en déduit que

$$(\lambda - B^p)^{-1} = P_+^p (\lambda - A)^{-1} P_+^p. \tag{V.78}$$

Étant donné f dans $D(B^p)$ on pose :

$$g = (\lambda - B^p)f \in \mathcal{H}^p. \tag{V.79}$$

(V.78) entraîne alors :

$$f = P_+^p F, \tag{V.80}$$

où

$$F = (\lambda - A)^{-1} g \in H_{loc}^2(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R}). \tag{V.81}$$

D'autre part (V.58) assure que :

$$[U(t)g]_1'(x) \pm [U(t)g]_2(x) = 0, \quad \pm x > \rho, \quad t \geq 0. \tag{V.82}$$

La formule de représentation (V.77) implique donc

$$F_1'(x) \pm F_2(x) = 0, \quad \pm x \geq \rho. \tag{V.83}$$

Par continuité de F_1' et F_2 on conclut que :

$$F_1'(\pm \rho) \pm F_2(\pm \rho) = 0. \tag{V.84}$$

f est maintenant décrit par les décompositions (V.51), (V.52), (V.53) :

$$f = P_+^p F = \begin{cases} {}^t(F_1(\rho), 0), & \rho < x, \\ F, & |x| < \rho, \\ {}^t(F_1(-\rho), 0), & x < -\rho. \end{cases} \tag{V.85}$$

On conclut que :

$$f \in \mathcal{H}^p, \quad f|_{]-\rho, \rho[} \in H^2(]-\rho, \rho[) \cap H^1(]-\rho, \rho[), \quad f_1'(\pm \rho) \pm f_2(\pm \rho) = 0. \tag{V.86}$$

Réciproquement, étant donné f vérifiant (V.86), on étudie :

$$\frac{Z^p(t)f - f}{t} = P_+^p \left(\frac{U_0(t)f - f}{t} \right) + P_+^p \frac{1}{t} \int_0^t U_0(t-s) \mathcal{V} U(s)f ds. \tag{V.87}$$

Il est clair que

$$P_+^p \frac{1}{t} \int_0^t U_0(t-s) \mathcal{V} U(s)f ds \rightarrow \mathcal{V} f \quad \text{dans } \mathcal{H}_+, \quad t \rightarrow 0^+. \tag{V.88}$$

On choisit \tilde{f}_2

$$\tilde{f}_2 \in H^1(\mathbb{R}), \quad \tilde{f}_2|_{] -\rho, \rho[} = f_2|_{] -\rho, \rho[,} \quad \text{supp } \tilde{f}_2 \subset [-\rho - 1, \rho + 1]. \quad (\text{V. 89})$$

On pose

$$\tilde{f}_1(x) = \begin{cases} f_1(\rho) - \int_{\rho}^x \tilde{f}_2(y) dy, & \rho < x, \\ f_1(x), & |x| < \rho, \\ f_1(-\rho) + \int_{-\rho}^x \tilde{f}_2(y) dy, & x < -\rho. \end{cases} \quad (\text{V. 90})$$

$\tilde{f} = {}^t(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ satisfait alors :

$$\tilde{f} \in \mathcal{H}_+ \cap D(A_0), \quad (\text{V. 91})$$

$$f - \tilde{f} \in D_+^{\rho}. \quad (\text{V. 92})$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} P_+^{\rho} \left(\frac{U_0(t) f - f}{t} \right) &= P_+^{\rho} \left(\frac{U_0(t) \tilde{f} - \tilde{f}}{t} \right) \\ &\rightarrow P_+^{\rho} A_0 \tilde{f} \text{ dans } \mathcal{H}_+, \quad t \rightarrow 0^+ \end{aligned} \quad (\text{V. 93})$$

ce qui montre que f est dans le domaine de B^{ρ} et achève la preuve de (V. 72).

L'étude précédente implique que :

$$B^{\rho} f = P_+^{\rho} A_0 \tilde{f} + \mathcal{V} f \in \mathcal{H}^{\rho}. \quad (\text{V. 94})$$

(V. 73) en découle immédiatement.

Q.E.D.

Puisque $e^{-kt} Z^{\rho}(t)$ est un semi-groupe de contraction compact pour $t \geq 2\rho$, le spectre de son générateur $B^{\rho} - k$ est dénombrable, sans point d'accumulation, et composé de valeurs propres; il en est donc de même pour Σ^{ρ} . Soit $\mu \in \Sigma^{\rho}$ et f une fonction propre associée

$$f = {}^t(f_1, f_2) \in \mathcal{H}^{\rho}, \quad B^{\rho} f = \mu f. \quad (\text{V. 95})$$

(V. 73) entraîne que :

$$f_1(x) = f_1(\pm \rho), \quad f_2(x) = 0, \quad \pm x > \rho, \quad (\text{V. 96})$$

$$L_{\mathcal{V}} f_1 = -\mu^2 f_1, \quad f_2(x) = \mu f_1(x), \quad |x| < \rho, \quad (\text{V. 97})$$

$$f_1'(\pm \rho^{\mp}) = \mp \mu f_1(\pm \rho). \quad (\text{V. 98})$$

On pose

$$\mu = -i\sigma \quad (\text{V. 99})$$

$$\varphi(x) = f_1(x), \quad |x| < \rho \quad (\text{V. 100})$$

$$\varphi(x) = f_1(\pm \rho) e^{\pm i\sigma(x \mp \rho)}, \quad \pm x \geq \rho. \quad (\text{V. 101})$$

φ satisfait

$$L_V \varphi = \sigma^2 \varphi, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{V. 102}$$

$$\varphi(x) \approx e^{\pm i \sigma x}, \quad x \rightarrow \pm \infty. \tag{V. 103}$$

On en déduit que

$$W(\sigma) = 0 \tag{V. 104}$$

et que f est de la forme (V. 15). Réciproquement, on vérifie facilement que f donné par (V. 15) sous la condition (V. 104) est fonction propre de B^p associée à $\mu = -i\sigma$, ce qui achève la démonstration de (V. 14) et (V. 15).

Pour montrer que Σ^p est infini, nous prouvons que $W(\sigma)$ est une fonction entière d'ordre fini et appliquons les théorèmes de Hadamard, Paley-Wiener et Titchmarsh [3].

LEMME V. 2. — Pour tout x fixé, $f_+(x, \sigma)$ est une fonction entière de σ d'ordre ≤ 1 .

Preuve du lemme V. 2. — $f_+(x, \sigma)$ est solution de l'équation :

$$f_+(x, \sigma) = e^{i\sigma x} - \int_x^\infty \frac{\sin \sigma(x-y)}{\sigma} V(y) f_+(y, \sigma) dy; \tag{V. 105}$$

$\sigma \in \mathbb{C}$ étant donné, on pose :

$$f_+^0(x, \sigma) = e^{i\sigma x}, \tag{V. 106}$$

$$0 \leq n, \quad f_+^{n+1}(x, \sigma) = - \int_x^\infty \frac{\sin \sigma(x-y)}{\sigma} V(y) f_+^n(y, \sigma) dy. \tag{V. 107}$$

On remarque que

$$\frac{|\sin \sigma(x-y)|}{|\sigma|} \leq \frac{e^{\alpha(y-x)}}{|\sigma|}, \quad x \leq y, \quad \alpha = |\operatorname{Im} \sigma|. \tag{V. 108}$$

On en déduit que

$$e^{\alpha x} |f_+^{n+1}(x, \sigma)| \leq \frac{1}{|\sigma|} \int_x^\infty |V(y)| e^{\alpha y} |f_+^n(y, \sigma)| dy. \tag{V. 109}$$

Une récurrence aisée donne alors

$$e^{\alpha x} |f_+^n(x, \sigma)| \leq \frac{1}{n! |\sigma|^n} \left(\int_x^\infty |V(y)| dy \right)^n, \quad 0 \leq n. \tag{V. 110}$$

La série

$$f_+(x, \sigma) = \sum_{n=0}^\infty f_+^n(x, \sigma) \tag{V. 111}$$

converge alors localement uniformément par rapport à $\sigma \in \mathbb{C}^*$ et on a :

$$|f_+(x, \sigma)| \leq e^{-\alpha x} e^{(1/\sigma) \|V\|_{L^1}}. \tag{V. 112}$$

Comme V est à support compact, $f_+(x, \sigma)$ est une fonction entière de σ et (V. 112) entraîne que :

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log Log}(\sup\{|f_+(x, \sigma)|, |\sigma|=r\})}{\text{Log } r} \leq 1. \quad (\text{V. 113})$$

Q.E.D.

A présent nous exprimons $W(\sigma)$ en fonction de $f_+(x, \sigma)$ à l'aide des représentations (IV. 1) avec $x \leq -\rho$:

$$W(\sigma) = -2i\sigma + \int_{-\rho}^{\rho} e^{-i\sigma y} V(y) f_+(y, \sigma) dy, \quad (\text{V. 114})$$

$$W(\sigma) = -e^{-i\sigma x} (i\sigma f_+(x, \sigma) + f'_+(x, \sigma)). \quad (\text{V. 115})$$

L'inégalité (V. 112) assure que

$$\left| \int_{-\rho}^{\rho} e^{-i\sigma y} V(y) f_+(y, \sigma) dy \right| \leq C e^{2\rho |\text{Im } \sigma|} \quad (\text{V. 116})$$

et $W(\sigma)$ est une fonction entière de σ , d'ordre fini. Supposons que W n'admette qu'un nombre fini de zéros $\sigma_j \neq 0$, $1 \leq j \leq n$. Le théorème de factorisation de Hadamard entraîne que :

$$W(\sigma) = \sigma^m e^{Q(\sigma)} \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_j}\right) \quad (\text{V. 117})$$

où $Q(\sigma)$ est un polynôme. (V. 116) et (V. 114) impliquent

$$W(\sigma) \sim -2i\sigma, \quad \sigma \rightarrow +\infty. \quad (\text{V. 118})$$

On conclut de (V. 117) que :

$$W(\sigma) = -2i\sigma + C, \quad \sigma \in \mathbb{C} \quad (\text{V. 119})$$

où C est une constante indépendante de σ . Maintenant nous évaluons $W(\sigma)$ à l'aide de f_+^0 et f_+^1 (approximation de Born). On écrit :

$$W(\sigma) = -2i\sigma + \int_{-\rho}^{\rho} V(y) dy + \int_{-\rho}^{\rho} e^{-i\sigma y} V(y) f_+^1(y, \sigma) dy + \int_{-\rho}^{\rho} e^{-i\sigma y} V(y) \sum_{n=2}^{\infty} f_+^n(y, \sigma) dy. \quad (\text{V. 120})$$

D'une part,

$$\int_{-\rho}^{\rho} e^{-i\sigma y} V(y) f_+^1(y, \sigma) dy = -\frac{1}{2i\sigma} \left(\int_{-\rho}^{\rho} V(y) dy \right)^2 + \frac{1}{2i\sigma} \int_{-\rho}^{\rho} e^{-2i\sigma y} V(y) \left(\int_y^{\rho} e^{2i\sigma z} V(z) dz \right) dy. \quad (\text{V. 121})$$

D'autre part, l'estimation (V. 110) assure que :

$$\left| \int_{-\rho}^{\rho} e^{-i\sigma y} V(y) \sum_{n=2}^{\infty} f_+^n(y, \sigma) dy \right| = O\left(\frac{e^{\rho |\operatorname{Im} \sigma - |\operatorname{Im} \sigma||}}{|\sigma|^2 |\operatorname{Im} \sigma - |\operatorname{Im} \sigma||} \right). \quad (\text{V. 122})$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} & \int_{-\rho}^{\rho} e^{-2i\sigma y} V(y) \left(\int_y^{\rho} e^{2i\sigma z} V(z) dz \right) dy \\ & \quad + \int_{-\rho}^{\rho} e^{2i\sigma y} V(y) \left(\int_y^{\rho} e^{-2i\sigma z} V(z) dz \right) dy \\ & = \int_{-\rho}^{\rho} e^{2i\sigma y} V(y) \left(\int_{\rho}^y e^{-2i\sigma z} V(z) dz \right) dy \\ & \quad + \int_{-\rho}^{\rho} e^{-2i\sigma y} V(y) \left(\int_{\rho}^y e^{2i\sigma z} V(z) dz \right) dy \\ & = \hat{V}(2\sigma) \cdot \hat{V}(-2\sigma) \quad (\text{V. 123}) \end{aligned}$$

où \hat{V} est la transformée de Fourier de V , on déduit de (V. 119-123) que :

$$\begin{aligned} W(\sigma) &= -2i\sigma + \int V(x) dx - \frac{1}{2i\sigma} \left(\int V(x) dx \right)^2 \\ & \quad + \frac{1}{2i\sigma} \hat{V}(2\sigma) \hat{V}(-2\sigma) + O\left(\frac{e^{\rho |\operatorname{Im} 2\sigma|}}{|\sigma|^2} \right) = -2i\sigma + C. \quad (\text{V. 124}) \end{aligned}$$

Le théorème de Paley-Wiener-Schwartz implique alors que :

$$\operatorname{supp}(V * \check{V}) \subset [-\rho, \rho] \quad (\text{V. 125})$$

où

$$\check{V}(x) = V(-x). \quad (\text{V. 126})$$

Quitte à faire une translation sur V on peut supposer que V n'est presque partout nul sur aucun voisinage de $\pm\rho$. On pose :

$$\varphi(X) = V(X - \rho), \quad \psi(X) = \check{V}(X - \rho). \quad (\text{V. 127})$$

On a :

$$(\varphi * \psi)(X) = (V * \check{V})(X - 2\rho). \quad (\text{V. 128})$$

Donc, par (V. 125)

$$(\varphi * \psi)(X) = 0, \quad 0 \leq X < \rho. \quad (\text{V. 129})$$

Les supports de φ et ψ étant inclus dans \mathbb{R}^+ , le théorème de Titchmarsh assure qu'il existe des réels $a, b, 0 \leq a, 0 \leq b$ tels que :

$$a + b \geq \rho, \quad (\text{V. 130})$$

$$\varphi(X) = 0 \quad \text{sur } [0, a[\quad \text{ou} \quad \psi(X) = 0 \quad \text{sur } [0, b], \quad (\text{V. 131})$$

c'est-à-dire

$$V(X)=0 \quad \text{sur }]-\rho, -\rho+a[\text{ ou }]\rho-b, \rho[, \quad (\text{V. 132})$$

ce qui constitue la contradiction souhaitée.

Q.E.D.

Enfin, nous vérifions que les valeurs propres de B^p sont simples. Soient $f = {}^t(f_1, f_2)$, $g = {}^t(g_1, g_2)$ deux fonctions propres de B^p associées à une même valeur propre μ . D'après (V.97), f_1 et g_1 sont fonctions propres de L_V dans $H^2]-\rho, \rho[$ donc leur Wronskien est constant sur $]-\rho, \rho[$:

$$W(f_1, g_1)(x) = f_1'(x)g_1(x) - f_1(x)g_1'(x) = \text{Cte}, \quad |x| < \rho.$$

En faisant tendre x vers ρ , on déduit de (V.98) que le Wronskien est nul sur $]-\rho, \rho[$ et, compte tenu de (V.96), on conclut que f et g sont colinéaires.

Q.E.D.

Preuve du théorème V.3. — I^p est clairement une isométrie de \mathcal{H}^p dans \mathcal{H}_+^p réciproquement pour $f^p = {}^t(f_1^p, \rho_2^p)$ dans \mathcal{H}_+^p , on définit:

$$(I^p)^{-1} f^p = f = {}^t(f_1, f_2), \quad (\text{V. 133})$$

$$f_{|]-\rho, \rho[} = f^p, \quad \pm x \geq \rho \Rightarrow f_1(x) = f_1(\pm \rho), \quad f_2(x) = 0. \quad (\text{V. 134})$$

On a alors $I^p f = f^p$ ce qui prouve la surjectivité de I^p sur \mathcal{H}_+^p . Le lemme V.1 entraîne immédiatement:

$$A^p = I^p B^p (I^p)^{-1}. \quad (\text{V. 135})$$

On en déduit que $U^p(t)$ donné par:

$$U^p(t) = I^p Z^p(t) (I^p)^{-1}, \quad 0 \leq t \quad (\text{V. 136})$$

est un semi-groupe fortement continu sur \mathcal{H}_+^p dont le générateur est A^p .

Q.E.D.

Preuve du théorème V.4. — Le théorème V.2 assure que l'ensemble des zéros de $W(\sigma)$ est infini dénombrable. D'une part, l'ensemble des zéros dans $\{\sigma \in \mathbb{C}, \text{Im } \sigma > 0\}$ coïncide d'après le lemme III.1 avec l'ensemble des valeurs propres non nulles de L_V qui est fini d'après la proposition II.1. D'autre part, la relation d'unitarité (III.28) interdit l'existence de zéros réels non nuls. La propriété (V.26) est une conséquence immédiate de la compacité de $Z^p(2\rho)$ (cf. Lax et Phillips [20], p. 85). De même, un résultat classique sur les semi-groupes compacts ([20], p. 86) assure que:

$$\left\| Z^p(t) - \sum_{j=-N}^n e^{-i\sigma_j t} P_j \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{X}^p)} \leq C(n, \varepsilon) |e^{(-i\sigma_{n+1} + \varepsilon)t}|, \quad 0 < \varepsilon, \quad (\text{V. 137})$$

où P_j est le projecteur de \mathcal{X}^p sur le sous-espace de dimension 1 engendré par la fonction propre $f(x, -i\sigma_j)$ de B^p associée à la valeur propre $\mu = -i\sigma_j \in \Sigma^p$. L'estimation (V.30) suit alors de (V.137) et du lemme II.1.

Pour évaluer le coefficient d'excitation C_j on écrit :

$$P_j f = C_j(f) f(x, -i\sigma_j), \tag{V.138}$$

où $C_j(f)$ dépend linéairement de f . On a donc :

$$[P_j f]_1 = C_j(f) f_+(x, \sigma_j). \tag{V.139}$$

Par ailleurs,

$$P_j f = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} (\mu - B^p)^{-1} f d\mu, \tag{V.140}$$

où l'intégrale forte à valeur dans $D(B^p)$ est prise sur un cercle $\mathcal{C} = \{\mu; |\mu + i\sigma_j| = \eta\}$ où η est suffisamment petit pour que :

$$\Sigma^p \cap B(-i\sigma_j, \eta) = \emptyset. \tag{V.141}$$

Soit $g(\mu) = (\mu - B^p)^{-1} f = (g_1, g_2) \in D(B^p)$. D'après (V.73) g_1 est solution de :

$$-g_1'' + V g_1 + \mu^2 g_1 = \mu f_1 + f_2, \quad |x| < \rho, \tag{V.142}$$

$$g_1'(\pm\rho) \pm g_2(\pm\rho) = -g_1'(\pm\rho) \pm \mu g_1(\pm\rho) = 0. \tag{V.143}$$

Un calcul standard donne l'expression de g_1

$$|x| < \rho, \quad g_1(x, \mu) = -\frac{1}{W(i\mu)} \left[f_+(x, i\mu) \int_{-\rho}^x f_-(y, i\mu) (\mu f_1(y) + f_2(y)) dy \right. \\ \left. + f_-(x, i\mu) \int_x^{\rho} f_+(y, i\mu) (\mu f_1(y) + f_2(y)) dy \right]. \tag{V.144}$$

Pour $\mu = -i\sigma_j$, f_1 et f_2 sont colinéaires et le théorème des résidus entraîne alors pour $|x| < \rho$:

$$[P_j f]_1(x) \\ = \text{Résidu} \left[\frac{1}{W(\sigma)} \int f_-(y, \sigma) (i\sigma f_1(y) - f_2(y)) dy, \sigma = \sigma_j \right] f_+(x, i\mu) \tag{V.145}$$

ce qui donne, par (V.139) l'expression de C_j .

Q.E.D.

Le fait que les valeurs propres et l'éventuel niveau virtuel nul soient des zéros simples est bien connu : on a pour $\sigma = \sigma_j, -N \leq j \leq -1$,

$$W'(\sigma_j) = \lambda W(\dot{f}_+(x, \sigma_j), f_+(x, \sigma_j)) + \frac{1}{\lambda} W(f_-(x, \sigma_j), \dot{f}_-(x, \sigma_j)), \\ f_-(x, \sigma_j) = \lambda f_+(x, \sigma_j), \quad \lambda \neq 0 \tag{V.146}$$

où $W(\dot{f}, g)$ désigne le wronskien de la dérivée de f par rapport à σ et de g . Posant :

$$G(\sigma, x) = W(f_+(x, \sigma), f_+(x, \sigma_j)) \tag{V.147}$$

on obtient par différenciation et intégration

$$\partial_{\sigma} G(\sigma, x) = \partial_{\sigma} G(\sigma, x_0) + \int_{x_0}^x [-2\sigma f_+(y, \sigma) f_+(y, \sigma_j) + (\sigma_j^2 - \sigma^2) \dot{f}_+(y, \sigma) f_+(y, \sigma_j)] dy. \quad (\text{V. 148})$$

Pour $x > \rho$ on a :

$$\begin{aligned} f_+(x, \sigma) &= e^{i\sigma x} \rightarrow 0, & x \rightarrow +\infty, \\ \dot{f}_+(x, \sigma) &= ix e^{i\sigma x} \rightarrow 0, & x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (\text{V. 149})$$

En prenant $\sigma = \sigma_j$ et $x_0 = +\infty$, il vient :

$$\partial_{\sigma} G(\sigma_j, x) = -2\sigma_j \int_x^{\infty} f_+^2(y, \sigma_j) dy, \quad (\text{V. 150})$$

et finalement

$$W'(\sigma_j) = -2\sigma_j \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f_+^2(y, \sigma_j) dy \neq 0, \quad (\text{V. 151})$$

ce qui prouve la simplicité de σ_j , $-N \leq j \leq -1$. D'autre part, on sait que (cf. [11], p. 147) :

$$0 < \text{Cte} \leq |\text{T}(\sigma)| \quad \text{où} \quad \text{T}(\sigma) = \alpha\sigma + o(\sigma), \quad \alpha \neq 0. \quad (\text{V. 152})$$

On en conclut que l'éventuel niveau virtuel nul est un zéro simple de W .

Q.E.D.

Preuve du théorème V.5. — On note $f_{\pm}(x, \sigma, \mathcal{V})$ et $W(\sigma, \mathcal{V})$ les fonctions de Jost et leur wronskien, associés à un potentiel \mathcal{V} . On suppose tout d'abord que $\text{Min}(\alpha_-, \alpha_+) > 0$ et :

$$K \subset \left\{ \sigma \in \mathbb{C}, \text{Im } \sigma > \frac{1}{2} \text{Min}(\alpha_-, \alpha_+) \right\}. \quad (\text{V. 153})$$

Alors pour tout x réel fixé et tout σ de K on a :

$$\begin{aligned} e^{-i\sigma x} f_+(x, \sigma, \mathcal{V}) \\ = 1 - \int_x^{\infty} \frac{1}{2} (1 - e^{2i\sigma(y-x)}) \mathcal{V}(y) e^{-i\sigma y} f_+(y, \sigma, \mathcal{V}) dy \end{aligned} \quad (\text{V. 154})$$

$$\begin{aligned} e^{-i\sigma x} \frac{d}{dx} f_+(x, \sigma, \mathcal{V}) \\ = i\sigma - \int_x^{\infty} \frac{1}{2} (1 + e^{2i\sigma(y-x)}) \mathcal{V}(y) e^{-i\sigma y} f_+(y, \sigma, \mathcal{V}) dy. \end{aligned} \quad (\text{V. 155})$$

Le lemme de Gronwall appliqué à (V. 154) et (V. 155) donne :

$$\begin{aligned}
 & |f_+(x, \sigma, V) - f_+(x, \sigma, V_{0,b}^{a,b})| \\
 & \quad + \left| \frac{d}{dx} f_+(x, \sigma, V) - \frac{d}{dx} f_+(x, \sigma, V_{0,b}^{a,b}) \right| \\
 & \leq C(x, \sigma) \left[\int_x^\infty e^{-2 \operatorname{Im} \sigma y} |V(y) - V_{0,b}^{a,b}(y)| dy \right] \\
 & \quad \times \exp \left[C(x, \sigma) \int_x^\infty e^{-2 \operatorname{Im} \sigma y} |V(y)| dy \right] \quad (\text{V. 156})
 \end{aligned}$$

où $C(x, \sigma)$ est uniformément borné sur K_σ . En établissant une estimation analogue pour f_- on en déduit que :

$$W(\sigma, V_{0,b}^{a,b}) \rightarrow W(\sigma, V) = W(\sigma), \quad a \rightarrow -\infty, \quad b \rightarrow +\infty \quad (\text{V. 157})$$

uniformément par rapport à σ dans K . La conclusion du théorème suit du théorème d'Hürwitz. On suppose maintenant que :

$$K \subset \left\{ \sigma \in \mathbb{C}^*; -\frac{\pi}{2\gamma} < \operatorname{Arg} \sigma < \pi + \frac{\pi}{2\gamma} \right\}. \quad (\text{V. 158})$$

Si V satisfait l'hypothèse (IV. 11), le potentiel :

$$V_{\gamma,\varepsilon}(x) = e^{-\varepsilon|x|^\gamma} V(x), \quad 0 \leq \varepsilon, \quad (\text{V. 159})$$

admet un prolongement holomorphe dans $\{x \in \mathbb{C}, |\Re x| > B\}$ et pour θ vérifiant :

$$\left. \begin{aligned}
 & \theta \in \left] -\frac{\pi}{2\gamma}, \frac{\pi}{2\gamma} \right[, \\
 & \forall \sigma \in K, \quad |\operatorname{Arg} \sigma| \leq |\theta| \quad \text{ou} \quad |\operatorname{Arg} \sigma - \pi| \leq |\theta|,
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{V. 160})$$

on a :

$$\int_{\rho > 0} |V_{\gamma,\varepsilon}(\pm B \pm \rho e^{i\theta})| d\rho < +\infty, \quad (\text{V. 161})$$

$$\sup_{|\alpha| \leq |\theta|} |\rho V_{\gamma,\varepsilon}(\rho e^{i\alpha})| \rightarrow 0, \quad |\rho| \rightarrow +\infty. \quad (\text{V. 162})$$

La preuve du théorème (IV. 1) montre que sous la condition (V. 160), et $\sigma \in K$, $f_+(x, \sigma, V_{\gamma,\varepsilon})$, satisfait :

$$\begin{aligned}
 & e^{-i\sigma x} f_+(x, \sigma, V_{\gamma,\varepsilon}) \\
 & = 1 - \int_{\Gamma_\theta(x)} \frac{1}{2i\sigma} (1 - e^{2i\sigma(y-x)}) V_{\gamma,\varepsilon}(y) e^{-i\sigma x} f_+(y, \sigma, V_\varepsilon) dy \quad (\text{V. 163})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & e^{-i\sigma x} \frac{d}{dx} f_+(x, \sigma, V_{\gamma,\varepsilon}) \\
 & = i\sigma - \int_{\Gamma_\theta(x)} \frac{1}{2} (1 + e^{2i\sigma(y-x)}) V_{\gamma,\varepsilon}(y) e^{-i\sigma x} f_+(y, \sigma, V_\varepsilon) dy \quad (\text{V. 164})
 \end{aligned}$$

$$|e^{-i\sigma x} f_+(x, \sigma, V_{\gamma, \varepsilon})| \leq \exp\left(\frac{1}{|\sigma|} \int_{\Gamma_\theta(x)} |V_{\gamma, \varepsilon}(y)| |dy|\right). \quad (\text{V. 165})$$

Le lemme de Gronwall donne encore :

$$\begin{aligned} |f_+(x, \sigma, V_{\gamma, \varepsilon}) - f_+(x, \sigma, V)| + \left| \frac{d}{dx} f_+(x, \sigma, V_{\gamma, \varepsilon}) - \frac{d}{dx} f_+(x, \sigma, V) \right| \\ \leq C(x, \sigma) \left(\int_{\Gamma_\theta(x)} |V_{\gamma, \varepsilon}(y) - V(y)| |dy| \right) \\ \times \exp \left[C(x, \sigma) \int_{\Gamma_\theta(x)} |V(y)| |dy| \right], \quad (\text{V. 166}) \end{aligned}$$

où $C(x, \sigma)$ est uniformément borné par rapport à $\sigma \in \mathbf{K}$.

Une estimation analogue pour f_- entraîne donc que :

$$W(\sigma, V_{\gamma, \varepsilon}) \rightarrow W(\sigma, V) = W(\sigma), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (\text{V. 167})$$

uniformément par rapport à σ dans \mathbf{K} . Enfin, $\varepsilon > 0$ étant fixé, $V_{\gamma, \varepsilon}(x)$ décroît plus vite que toute exponentielle et $f_+(x, \sigma, V_{\gamma, \varepsilon})$ est solution de (V. 162) avec $\theta = 0$. Comme pour l'estimation (V. 155) on prouve que :

$$\begin{aligned} |f_+(x, \sigma, V_{\gamma, \varepsilon}) - f_+(x, \sigma, V_{\gamma, \varepsilon}^{a, b})| + \left| \frac{d}{dx} f_+(x, \sigma, V_{\gamma, \varepsilon}) - \frac{d}{dx} f_+(x, \sigma, V_{\gamma, \varepsilon}^{a, b}) \right| \\ \leq C(x, \sigma) \left[\int_x^\infty e^{-2 \operatorname{Im} \sigma y - \varepsilon |y|^\gamma} |V_{\gamma, \varepsilon}(y) - V_{\gamma, \varepsilon}^{a, b}(y)| |dy| \right] \\ \times \exp \left[C(x, \sigma) \int_x^\infty e^{-2 \operatorname{Im} \sigma y - \varepsilon |y|^\gamma} |V_{\gamma, \varepsilon}(y)| |dy| \right]. \quad (\text{V. 168}) \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$W(\sigma, V_{\gamma, \varepsilon}^{a, b}) \rightarrow W(\sigma, V_{\gamma, \varepsilon}), \quad a \rightarrow -\infty, \quad b \rightarrow +\infty, \quad (\text{V. 169})$$

uniformément par rapport à σ dans \mathbf{K} .

On conclut par (V. 167), (V. 169) et le théorème d'Hürwitz.

Q.E.D.

VI. CALCUL DES RÉSONANCES PAR LA MÉTHODE DE PRONY

En 1795, R. Prony étudia dans [33] le problème de l'interpolation d'une fonction $f(t)$ par une somme d'exponentielles à exposants inconnus :

$$f(t) = \sum_{j=1}^N C_j e^{-i\sigma_j t}, \quad 0 \leq t, \quad (\text{VI. 1})$$

où les C_j sont non nuls et les σ_j distincts deux à deux; l'algorithme de Prony permet de reconstruire les σ_j et C_j à partir de la fonction f supposée connue; il comporte quatre étapes:

1° La première étape consiste à déterminer le signal f et à l'échantillonner: on choisit un pas $\Delta T > 0$ et on pose:

$$f_k = f(k \Delta T), \quad z_j = e^{-i \sigma_j \Delta T}. \quad (\text{VI. 2})$$

L'équation (VI. 1) donne un système d'équations polynomiales:

$$\sum_{j=1}^N C_j (z_j)^k = f_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (\text{VI. 3})$$

2° L'idée de Prony est de transformer les équations (VI.3) en un système d'équations aux différences: étant donné $M \geq N$, on résout le système linéaire surdéterminé:

$$\alpha_N = 1, \quad \sum_{j=0}^N \alpha_j f_{j+m} = 0, \quad m = 0, \dots, M-1. \quad (\text{VI. 4})$$

3° On remarque que les X_j :

$$X_j = C_j \sum_{k=0}^N \alpha_k (z_j)^k, \quad j = 1, \dots, N,$$

sont solutions d'un système de Van der Monde

$$\sum_{j=1}^N X_j z_j^m = \sum_{j=1}^N \alpha_j f_{j+m} = 0, \quad m = 0, \dots, M-1. \quad (\text{VI. 5})$$

Donc $X_j = 0$ et les z_j recherchés sont les solutions de l'équation polynomiale:

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k z^k = 0. \quad (\text{VI. 6})$$

4° Ayant déterminé les racines z_j du polynôme (VI. 6), les coefficients C_j sont obtenus en résolvant (VI. 3).

La procédure de Prony a été utilisée avec succès en électromagnétisme (cf. par exemple [26], [27]) et en acoustique [24], [39]; nous renvoyons à [39] pour une analyse détaillée de cette méthode. Son emploi pour le calcul des résonances d'un trou noir est légitimé par le théorème V.5 et la formule (V.30). Nous décrivons les approximations imposées par l'expérimentation numérique. A priori les résonances σ_j associées au potentiel $V_{l,s}$, $l \geq s$ sont recherchées sous la forme approchée des résonances $\sigma_{\epsilon,j}^{a,b}$ associées au potentiel amorti et tronqué:

$$V_{\epsilon}^{a,b}(x) = \chi_{[a,b]}(x) e^{-\epsilon |x|^\gamma} V_{l,s}(x), \quad 1 < \gamma. \quad (\text{VI. 7})$$

D'après le théorème V. 4, une solution $\Phi_\varepsilon^{a,b}$ de l'équation (I. 1) vérifie :

$$\Phi_\varepsilon^{a,b}(t, x) = \sum_{j=1}^N C_j(x) e^{-i\sigma_{\varepsilon,j}^{a,b}t} + o(e^{-i\sigma_{\varepsilon,N}^{a,b}t}). \quad (\text{VI. 8})$$

Pour $t \geq t_0 = t_0(x, N, \varepsilon, a, b)$ suffisamment grand, l'erreur $o(e^{-i\sigma_{\varepsilon,N}^{a,b}t})$ sera de l'ordre de la précision machine et ainsi la solution calculée $\hat{\Phi}_\varepsilon^{a,b}$ s'identifie à une somme finie d'exponentielles :

$$\hat{\Phi}_\varepsilon^{a,b}(t, x) = \sum_{j=1}^N \hat{C}_j(x) e^{-i\hat{\sigma}_{\varepsilon,j}^{a,b}t}, \quad t \geq t_0, \quad (\text{VI. 9})$$

où les \hat{C}_j et $\hat{\sigma}_{\varepsilon,j}^{a,b}$ seront les valeurs calculées de C_j et $\sigma_{\varepsilon,j}^{a,b}$. D'autre part, x étant fixé, pour $t \geq t_1$, $\hat{\Phi}_\varepsilon^{a,b}(t, x)$ sera aussi de l'ordre de la précision machine et donc le calcul de $\hat{\Phi}_\varepsilon^{a,b}(t, x)$ sera pertinent pour $t \in [0, t_1]$. Par ailleurs, $\hat{\Phi}_\varepsilon^{a,b}(t_1, x)$ est déterminé par les valeurs de $\hat{\Phi}_\varepsilon^{a,b}(t, x)$ dans le domaine de dépendance :

$$\{(s, y), 0 \leq s \leq t_1, |y - x| \leq t_1 - s\}. \quad (\text{VI. 10})$$

Donc, pour $a \leq x - t_1$, $b \geq x + t_1$, $\hat{\Phi}_\varepsilon^{a,b}(t, x)$ coïncide sur le domaine (VI. 10) avec la solution calculée $\hat{\Phi}_\varepsilon$ de l'équation (I. 1), de mêmes données initiales, et pour le potentiel

$$V_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon|x|^l} V_{l,s}(x). \quad (\text{VI. 11})$$

Nous avons constaté numériquement que t_0 et t_1 peuvent être choisis indépendants de ε petit. Donc si ε est suffisamment petit, $V_\varepsilon - V$ sera de l'ordre de la précision machine et $\hat{\Phi}_\varepsilon$ coïncidera dans (VI. 10) avec la solution calculée $\hat{\Phi}$ de l'équation (I. 1) de mêmes données initiales associée au potentiel $V_{l,s}$. On est ainsi amené à considérer que la décomposition spectrale (I. 10) est numériquement vérifiée pour les potentiels $V_{l,s}$.

On pose maintenant :

$$f(t) = \hat{\Phi}(t_0 + t, x_0) = \sum_{j=1}^N \hat{C}_j(x) e^{-i\hat{\sigma}_j t}, \quad 0 \leq t \leq t_1 - t_0. \quad (\text{VI. 12})$$

L'algorithme de Prony fournit alors les quantités calculées $\hat{\sigma}_j$ et \hat{C}_j qui approchent les N premières résonances et coefficients d'excitation. Comme nous l'avons souligné, on ne dispose pas d'estimations des erreurs commises, seule la comparaison avec les valeurs obtenues par d'autres méthodes assure que les $\hat{\sigma}_j$ calculées sont des approximations correctes des résonances; cette remarque s'applique d'ailleurs à toutes les méthodes. En revanche, on teste aisément la fiabilité de la procédure de Prony : le tableau 1 donne les résultats du calcul des fréquences $\sigma_j = \alpha_j - i\beta_j = (\alpha_j, \beta_j)$ pour le signal

$$f(t) = \sum_{j=1}^3 e^{-i\sigma_j t} + e^{i\sigma_j^* t}.$$

TABLEAU 1. — *Test de la méthode de Prony*

	Valeur exacte	Valeur calculée
σ_1	0,747 343 + 0,177 925 <i>i</i>	0,747 343 02 ± 2 · 10 ⁻⁸ + 0,177 925 02 ± 2 · 10 ⁻⁸ <i>i</i>
σ_2	0,693 422 + 0,547 830 <i>i</i>	0,693 41 ± 2 · 10 ⁻⁵ + 0,547 82 ± 2 · 10 ⁻⁵ <i>i</i>
σ_3	0,602 107 + 0,956 544 <i>i</i>	0,602 1 ± 10 ⁻⁴ + 0,956 6 ± 10 ⁻⁴ <i>i</i>

Les valeurs calculées sont stables vis-à-vis du changement du pas d'échantillonnage ΔT (à une variation de $n 10^{-m}$ près indiquée s'il y a lieu). Cette expérimentation (sur Spark Station Sun) met en évidence les avantages et les limitations de la méthode : les premiers pôles, *i. e.* ceux de partie imaginaire petite, sont calculés avec une excellente précision; par contre, il est difficile d'obtenir les résonances σ_j d'indice élevé, *i. e.* de grande partie imaginaire, le signal $e^{-i\sigma_j t}$ étant trop rapidement évanescent.

Nous donnons maintenant quelques détails sur la mise en œuvre numérique. L'équation (I. 1) est écrite sous forme du système du premier ordre

$$\left. \begin{aligned} (\partial_t + \partial_x) u &= V \Phi, \\ (\partial_t - \partial_x) v &= V \Phi, \\ \partial_t \Phi &= 2^{-1} (u + v), \end{aligned} \right\} \quad \text{(VI. 13)}$$

où

$$u = (\partial_t - \partial_x) \Phi, \quad v = (\partial_t + \partial_x) \Phi, \quad \text{(VI. 14)}$$

complété par les conditions aux limites dissipatives associées à la troncature de V sur $[a, b]_x$ (conditions artificielles d'Engquist et Majda [13]):

$$u(t, a) = v(t, b) = 0, \quad t \geq 0. \quad \text{(VI. 15)}$$

En fait Φ sera calculée dans le domaine (VI. 10) où les points (x, t) sont non affectés par cette condition au bord, et nous constatons une décroissance exponentielle durant l'intervalle de calcul $[0, t_1] = [0, 160]$ au bout duquel la solution numérique se stabilise à une valeur très petite (*voir* le corollaire II. 1 et les remarques II. 3 et V. 4).

Le système est résolu par un schéma aux différences finies avec des données initiales du type

$$\left. \begin{aligned} \Phi(0, x) &= 0, \\ \partial_t \Phi(0, x) &= \lambda \{ 1 + \cos[\pi(x - x_0)/R] \} \quad \text{si } |x - x_0| \leq R, \\ \partial_t \Phi(0, x) &= 0 \quad \text{si } |x - x_0| \geq R. \end{aligned} \right\} \quad \text{(VI. 16)}$$

Afin que l'instant t_0 à partir duquel on identifie $\hat{\Phi}(t, x_0)$ à une somme d'exponentielles soit le plus petit possible, on choisit comme point d'observation et centre du support des données initiales, le point x_0 où le potentiel

atteint son maximum, et l'amplitude λ et la taille R du support de façon à ce que $\partial_t \Phi(0, x)$ soit une impulsion brève; par exemple pour un pas de discrétisation $\Delta t = 10^{-3}$

$$\lambda = 10^5, \quad R = 5 \Delta t, \quad a = -40, \quad b = 120. \quad (\text{VI. 17})$$

Dans la seconde étape on résout le système surdéterminé (VI. 4) sous la forme générale

$$A_P X_P = B_P, \quad P \geq N, \quad (\text{VI. 18})$$

où

$$X_P = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{P-1}), \quad B_P = (f_P, f_{P+1}, \dots, f_{P+M-1}),$$

$$A_P = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_{P-1} \\ f_1 & f_2 & \dots & f_P \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{M-1} & f_M & \dots & f_{P+M-2} \end{bmatrix}$$

TABLEAU 2. — Ondes gravitationnelles, $s=2$.

Prony	C.D.	Leaver	WKB
$l=2$			
0,747 343 49+	0,747 34+	0,747 343 +	0,746 4+
0,177 924 62 i	0,177 92 i	0,177 925 i	0,178 4 i
0,693 42+	0,696 87+	0,693 422+	0,692 0+
0,547 83 i	0,549 38 i	0,547 830 i	0,549 8 i
0,60+		0,602 107+	0,605 8+
0,95 i		0,956 554 i	0,942 2 i
$l=3$			
1,198 887 042+	1,198 89+	1,198 887 +	1,198 6+
0,185 406 087 i	0,185 41 i	0,185 406 i	0,185 4 i
1,165 288+	1,164 02+	1,165 288 +	1,164 8+
0,562 596 i	0,562 31 i	0,562 596 i	0,562 8 i
$1,103 4 \pm 2 \cdot 10^{-4} +$	$0,852 57 +$	1,103 370 +	1,106 4+
$0,959 8 \pm 2 \cdot 10^{-4} i$	$0,745 46 i$	0,958 186 i	0,953 4 i
1,02+		1,023 924+	1,031 4+
1,38 i		1,380 674 i	1,354 8 i
$l=4$			
1,618 357 880 4+	1,618 35+	1,618 36+	1,618 2+
0,188 327 912 8 i	0,188 32 i	0,188 33 i	0,188 4 i
1,593 264 2+	1,593 13+	1,593 26+	1,593 0+
0,568 668 7 i	0,568 77 i	0,568 67 i	0,568 8 i
1,545 5+	1,120 19+	1,545 42+	1,547 2+
0,959 8 i	0,846 58 i	0,959 82 i	0,958 0 i
$1,477 \pm 2 \cdot 10^{-3} +$		1,479 67+	1,486 6+
$1,367 \pm 2 \cdot 10^{-3} i$		1,367 85 i	1,356 6 i

TABLEAU 3. — *Champ scalaire, s=0.*

	Prony	Leaver	WKB
$l=0$	$0,220\ 91 \pm 2 \cdot 10^{-5} +$ $0,209\ 80 \pm 2 \cdot 10^{-5} i$	$0,221\ 0 +$ $0,209\ 8 i$	$0,209\ 2 +$ $0,230\ 4 i$
$l=1$	$0,585\ 872\ 33 +$ $0,195\ 319\ 97 i$ $0,529 +$ $0,612 i$	$0,585\ 8 +$ $0,195\ 4 i$ $0,529\ 0 +$ $0,612\ 6 i$	$0,582\ 2 +$ $0,196\ 0 i$ $0,524\ 4 +$ $0,614\ 8 i$
$l=2$	$0,967\ 287\ 99 +$ $0,193\ 517\ 54 i$ $0,927\ 7 +$ $0,591\ 2 i$ $0,86 +$ $1,02 i$	$0,967\ 2 +$ $0,193\ 6 i$ $0,927\ 8 +$ $0,591\ 2 i$ $0,861\ 0 +$ $1,017\ 2 i$	$0,966,4 +$ $0,193\ 6 i$ $0,926\ 4 +$ $0,591\ 6 i$ $0,863\ 4 +$ $1,006\ 8 i$

La matrice circulante A_p est très mal conditionnée et ses valeurs singulières sont peu séparées; c'est dans cette étape qu'apparaît l'instabilité intrinsèque du calcul de résonances : une faible variation de B_p affecte profondément X_p , aussi le calcul de la solution Φ de (I. 1) doit être extrêmement précis. On constate que la meilleure stabilité est obtenue pour

$$N \leq P \leq N + 4, \quad P \leq M \leq 5M/2.$$

L'équation (VI.18) est résolue par une méthode d'inverse généralisé (programme DSVDC de Linpack).

Les étapes 3 et 4 ne posent pas de difficultés particulières; les racines du polynôme (VI.6) sont déterminées par la méthode de Müller; les coefficients C_j sont obtenus par la méthode de Gauss (routines CGECO et CGESL de Linpack).

Nous avons appliqué cette procédure pour le calcul des modes gravitationnels, électromagnétiques, scalaires. Les tableaux 2, 3, 4, donnent nos résultats obtenus par la méthode de Prony implantée sur Spark Station et les valeurs données par S. Chandrasekar et S. Detweiler (C.C.) [7], E. Leaver [22], et S. Iyer (méthode W.K.B.) [17]. Les résonances $\sigma_j = \pm \alpha_j - i \beta_j = (\alpha_j, \beta_j)$ sont présentées avec toutes les décimales invariantes par changement

- de la localisation de la donnée initiale $\Phi(0, x)$,
- de la taille R de son support,
- de son amplitude λ ,
- du point d'observation x_0 ,
- de l'instant initial d'observation t_0 ,
- du pas d'échantillonnage ΔT ,
- de la taille $M \times P$ de la matrice A_p .

TABLEAU 4. — *Champ électromagnétique, $s=1$.*

	Prony	Leaver	WKB
$l=1$	0,496 526 57+ 0,184 975 43 <i>i</i> 0,430+ 0,587 <i>i</i>	0,496 6+ 0,185 0 <i>i</i> 0,429 0+ 0,587 4 <i>i</i>	0,491 8+ 0,186 2 <i>i</i> 0,422 6+ 0,591 6 <i>i</i>
$l=2$	0,915 191 238+ 0,190 008 843 <i>i</i> 0,873 0+ 0,581 4 <i>i</i> 0,804 ± 2. 10 ⁻³ + 1,003 ± 2,10 ⁻³ <i>i</i>	0,915 2+ 0,190 0 <i>i</i> 0,873 0+ 0,581 4 <i>i</i> 0,802 4+ 1,003 2 <i>i</i>	0,914 2+ 0,190 2 <i>i</i> 0,871 6+ 0,582 0 <i>i</i> 0,804 6+ 0,991 8 <i>i</i>
$l=3$	1,313 797 950+ 0,191 232 426 <i>i</i> 1,283 47+ 0,579 45 <i>i</i> 1,227+ 0,984 <i>i</i>	1,313 8+ 0,191 2 <i>i</i> 1,283 4+ 0,579 4 <i>i</i> 1,227 6+ 0,984 2 <i>i</i>	1,313 4+ 0,191 2 <i>i</i> 1,283 0+ 0,579 6 <i>i</i> 1,230 2+ 0,980 2 <i>i</i>

Dans certains cas, une variation de $n 10^{-m}$ est indiquée. La similitude avec les résultats de E. Leaver est d'autant plus frappante que les sources d'erreurs numériques des deux méthodes sont très différentes. Par ailleurs ces valeurs ont été récemment confirmées par H. P. Nollert et B. G. Schmidt [29], [30], utilisant une méthode stationnaire basée sur l'évaluation du Wronskien (I. 8). Les troisièmes résonances de C.D. pour $s=2$, $l=3$, 4, semblent être des artefacts numériques.

En conclusion, la méthode de Prony semble pouvoir assurer la meilleure précision de calcul des premières résonances; en revanche, du fait de la répartition spécifique des résonances σ_j d'un trou noir ($|\text{Im } \sigma_j| \rightarrow \infty$, $\text{Re } \sigma_j \rightarrow 0$), son efficacité paraît diminuer rapidement pour des ordres croissants. Son développement actuellement en cours sur Cray 2 permettra d'en déterminer le domaine de validité.

REMERCIEMENTS

Alain Bachelot remercie vivement T. Damour de lui avoir suggéré l'étude des résonances d'un trou noir lors d'une invitation à l'I.H.E.S., et B. G. Schmidt qui proposa une approche par troncature. Les auteurs expriment leur reconnaissance au CCVR pour l'octroi de 60 heures de calcul sur Cray2, et à A. Sebban du CeReMaB pour de fructueuses conversations.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. DE ALFARO et T. REGGE, *Potential Scattering*, North Holland, Amsterdam, 1965.
- [2] A. BACHELOT, Gravitational Scattering of electromagnetic field by Schwarzschild Black-Hole, *Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor.*, vol. **54**, n° 3, 1991, p. 261-320.
- [3] R. P. BOAS, *Entire Functions*, Academic Press, New York, 1954.
- [4] N. G. DE BRUIJN, *Asymptotic Methods in Analysis*, Dover, New York, 1981.
- [5] S. CHANDRASEKAR, *The mathematical theory of black-holes*, Oxford University Press, New York, 1983.
- [6] S. CHANDRASEKAR, On algebraically special perturbations of black holes, *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. **392**, 1984, p. 1-13.
- [7] S. CHANDRASEKAR, S. DETWEILER, The quasi-normal modes of the Schwarzschild black-hole, *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. **344**, 1975, p. 441-452.
- [8] T. DAMOUR, Black-Hole eddy currents, *Phys. Rev. D.*, vol. **18**, 10, 1978, p. 3598-3604.
- [9] T. DAMOUR, *Thèse de Doctorat d'État*, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris, 1979.
- [10] T. DAMOUR, in *Proceedings of the Second Marcel Grossman Meeting on General Relativity*, Ruffini Edt, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [11] P. DEIFT et E. TRUBOWITZ, Inverse Scattering on the Line, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **32**, 1979, p. 121-251.
- [12] J. DIMOCK, Scattering for the wave equation on the Schwarzschild metric, *Gen. Rel. Grav.*, vol. **17**, 4, 1985, p. 353-369.
- [13] B. ENGQUIST et A. MAJDA, Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **32**, 1979, p. 313-357.
- [14] V. FERRARI, B. MASHHOON, New approach to the quasinormal modes of a black-hole, *Phys. Rev. D.*, vol. **30**, 2, 1984, p. 295-304.
- [15] J. W. GUINN, Y. KOJIMA et B. F. SCHUTZ, High-overtone normal modes of Schwarzschild black-holes, *Class. Quantum Grav.*, vol. **7**, 1990, p. 47-53.
- [16] J. B. HARTLE et D. C. WILKINS, Analytic Properties of the Teukolsky Equation, *Comm. Math. Phys.*, vol. **38**, 1974, p. 47-63.
- [17] S. IYER, Black-hole normal modes: a WKB approach II; Schwarzschild black holes, *Phys. Rev. D.*, vol. **35**, 12, 1987, p. 3632-3636.
- [18] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer Verlag, New York, 1966.
- [19] K. D. KOKKOTAS, Normal modes of the Kerr black-hole, *Class. Quantum Grav.*, vol. **8**, 1991, p. 2217-2224.
- [20] P. LAX et R. PHILLIPS, *Scattering Theory*, Academic Press, New York, nouvelle édition 1989.
- [21] E. LEAVER, Spectral decomposition of the perturbation response of the Schwarzschild geometry, *Phys. Rev. D.*, vol. **34**, 2, 1986, p. 384-408.
- [22] E. LEAVER, An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black-holes, *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. **402**, 1985, p. 285-298.
- [23] D. A. MACDONALD, R. H. PRICE, K. S. THORNE, *Black-Holes: The Membrane Paradigm*, Yale University Press, New Haven, London, 1986.
- [24] G. MAJDA, W. STRAUSS et M. WEI, Numerical Computation of the Scattering Frequencies for Acoustic Wave Equations, *Comput. Phys.*, vol. **75**, 2, 1988, p. 345-358.
- [25] B. MAJUMDA et N. PANCHAPAKESAN, Schwarzschild black-hole normal modes using the Hill determinant, *Phys. Rev. D.*, vol. **40**, 1989, p. 2568-2571.
- [26] E. K. MILLER, R. MITTRA, A. J. POGGIO, M. L. VAN BLARICUM, Evaluation of a Processing Technique for Transient Data, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. **36**, 1, 1978, p. 165-173.
- [27] R. MITTRA, M. L. VAN BLARICUM, A Technique for Extracting the Poles and Residues of a System Directly from Its Transient Response, *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. **23**, 6, 1975, p. 777-781.

- [28] R. G. NEWTON, *Scattering Theory of Waves and Particles*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [29] H. P. NOLLERT, *Doktorarbeit*, Universität Tübingen, 1991.
- [30] H. P. NOLLERT, B. G. SCHMIDT, *Quasi-Normal Modes of Schwarzschild Black-Holes-Defined and Calculated via Laplace Transformtion*, preprint, 1992.
- [31] R. PHILLIPS, Scattering Theory for the Wave Equation with a Short Range Perturbation II, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. **33**, 6, 1984, p. 831-846.
- [32] R. H. PRICE, Y. SUN, Excitation of quasinormal ringing of a Schwarzschild black-hole, *Phys. Rev. D*, vol. **38**, 4, 1988, p. 1040-1052.
- [33] R. PRONY, Essai expérimental et analytique sur les lois de la dilatabilité de fluides élastiques et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alcool à différentes températures, *J. de l'École Polytechnique*, vol. **1**, cahier 2, 1795, p. 24-76.
- [34] M. REED et B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, vol. III, 1979, Academic Press.
- [35] M. REED et B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics*, vol. IV, 1978, Academic Press.
- [36] T. REGGE, Analytic Properties of the Scattering Matrix, *Il Nuovo Cimento*, vol. **8**, 5, 1958, p. 671-679.
- [37] M. SCHECHTER, *Operator Methods in Quantum Mechanics*, North Holland, New York, Oxford, 1981.
- [38] B. SCHMIDT, Communication privée, I.H.E.S., mars 1990.
- [39] M. WEI, Numerical Computation of Scattering Frequencies, *Ph. D. Thesis*, Dept. of Applied Math., Brown Univ., Providence, RI, 1986.
- [40] M. ZWORSKI, Distribution of Poles for Scattering on the Real Line, *J. Funct. Anal.*, vol. **73**, 1987, p. 277-296.

(Manuscrit reçu le 11 mars 1992.
version révisée reçue le 5 mai 1992.)