ALAIN BACHELOT

# Problème de Cauchy global pour des systèmes de Dirac-Klein-Gordon

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 48, nº 4 (1988), p. 387-422
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1988__48_4_387_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*
Vol. 48, n° 4, 1988, p. 387-422. *Physique théorique*

# Problème de Cauchy global pour des systèmes de Dirac-Klein-Gordon

par

**Alain BACHELOT**
Université de Bordeaux I, U. E. R. de Mathématiques et Informatique,
Unité associée au CNRS n° 226,
351, Cours de la Libération, 33405, Talence Cedex

RÉSUMÉ. — On considère un système de Dirac massif, couplé quadratiquement avec une équation des ondes en dimension 3 d'espace. Le problème de Cauchy global est bien posé si les non-linéarités satisfont certaines conditions algébriques en rapport avec l'invariance de Lorentz, la condition nulle et la compatibilité d'une forme sesquilinéaire avec le système de Dirac. L'exemple fondamental est le modèle pseudoscalaire de Yukawa des forces nucléaires. On utilise des estimations $L^2$-$L^\infty$ dans les espaces de Sobolev associés à la métrique de Lorentz, pour l'équation de Dirac avec un potentiel. On établit aussi la complétude de l'opérateur de diffusion pour un électron dans un champ électromagnétique libre.

ABSTRACT. — We consider a massive Dirac system quadratically coupled with a wave equation in three space dimensions. The global Cauchy problem is well posed if the nonlinearities satisfy some algebraic conditions related to the Lorentz-invariance, the null condition and the compatibility of a sesquilinear form with the Dirac system. The fundamental example is the pseudoscalar Yukawa model of nuclear forces. We use some $L^2$-$L^\infty$ estimates in Sobolev spaces associated with the Lorentz metric, for the Dirac equation with a potential. We establish the completness of the scattering operator for an electron in a free electromagnetic field.

## INTRODUCTION

Considérons un système de Dirac couplé quadratiquement avec une équation de Klein-Gordon ou des ondes dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}_1^4$ muni de la métrique de Lorentz $g_{\mu,\nu} = \text{diag}\,(1, -1, -1, -1)$ :

$$- i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + M\psi = \varphi V\psi \tag{1}$$

$$\square\varphi + m^2\varphi = \tilde{\psi}F\psi . \tag{2}$$

Les matrices de Dirac $\gamma^{\mu}$ vérifient les relations :

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu,\nu}I, \qquad \tilde{\gamma}^{\mu} = g^{\mu,\mu}\gamma^{\mu}. \tag{3}$$

M et $m$ sont des paramètres réels (masse des champs); V et F sont des matrices $4 \times 4$ à coefficients constants et $\tilde{A}$ désigne la transposée conjuguée d'une matrice A.

On sait que le problème de Cauchy associé à (1) (2) admet une solution globale pour des données initiales petites dans les cas suivants :

*i*) Si aucune masse n'est nulle ($M \neq 0, m \neq 0$), le système (1) (2) est équivalent à un système d'équations de Klein-Gordon à non-linéarités quadratiques étudiées par S. Klainerman [*14*]. Le point important est que les normes $L^{\infty}(\mathbb{R}_x^3)$ décroissent comme $|t|^{-1-\varepsilon}, 0 < \varepsilon$, si bien que l'énergie des seconds membres est intégrable en temps;

*ii*) si toutes les masses sont nulles ($M = m = 0$), le système (1) (2) est conformément invariant et l'existence de solutions globales est établie par Y. Choquet-Bruhat [*5*] (voir aussi [*6*] et [*7*]).

Dans le cas où :

$$M \neq 0, \qquad m = 0 , \tag{4}$$

il y a alors deux difficultés : d'une part la masse M non nulle brise l'invariance conforme, d'autre part le champ sans masse $\varphi(t, x)$ décroît uniformément *a priori* au mieux comme $0(|t|^{-1})$. On rencontre une difficulté analogue, la divergence infrarouge, dans l'étude du système de Dirac-Maxwell; néanmoins, dans ce cas, M. Flato, J. Simon et E. Taflin [*8*] ont montré l'existence de solutions dans $\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^3$ en modifiant l'opérateur d'onde de façon à absorber la partie lentement décroissante des champs. Nous montrons ici que le problème de Cauchy global à petites données initiales pour (1) (2) est encore bien posé sous des conditions algébriques sur les non-linéarités qui apparaissent naturellement dans des modèles de la Physique :

$$\tilde{V}\gamma^0 = \gamma^0 V, \qquad \tilde{F} = F ; \tag{H1}$$

cette hypothèse assure la conservation de la charge du spineur :

$$\int_{\mathbb{R}_x^3} |\psi(t,x)|^2 dx = \text{constante}. \tag{5}$$

Nous supposons aussi que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée :

(H2) $\quad \mathrm{V} = ig\gamma^5, \quad g \in \mathbb{R}, \quad \gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ;

(H3) $\quad \mathrm{F} = ig\gamma^0\gamma^5, \quad g \in \mathbb{R}$.

Cette dernière hypothèse admet deux interprétations :

*i*) le champ $\varphi$ est pseudoscalaire et Lorentz-invariant;

*ii*) l'interaction $\tilde{\psi}\mathrm{F}\psi$ est compatible avec le système de Dirac massif $-i\gamma^\mu\partial_\mu + \mathrm{M}$, au sens de B. Hanouzet et J.-L. Joly [*2*, *10*, *11*].

Les hypothèses (H1) (H2) (H3) sont simultanément satisfaites par le modèle pseudoscalaire de Yukawa défini par le lagrangien d'interaction $ig\varphi\tilde{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi$.

Nous utilisons les techniques d'estimations $\mathrm{L}^2$-$\mathrm{L}^\infty$ dans les espaces de Sobolev associés à la métrique de Lorentz, introduites par S. Klainerman [*14*] [*15*]. On définit la famille d'opérateurs différentiels $(\Gamma_\sigma)_{1 \leqslant \sigma \leqslant p}$ sur $\mathbb{R}_1^{n+1}$, composée de :

$$\partial_\mu,\ \Omega_{\mu,\nu} = x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu, \qquad 0 \leqslant \mu, \quad \nu \leqslant n \tag{6}$$

avec les conventions usuelles sur les indices avec la métrique diag $(1, -1, \ldots, -1)$.

On a les relations de commutation suivantes :

$$\begin{gathered} [\Omega_{\mu,\nu}, \partial_\lambda] = g_{\mu,\lambda}\partial_\nu - g_{\nu,\lambda}\partial_\mu \\ [\Omega_{\mu,\nu}, \Omega_{\alpha,\beta}] = g_{\mu,\alpha}\Omega_{\nu,\beta} - g_{\nu,\alpha}\Omega_{\mu,\beta} + g_{\mu,\beta}\Omega_{\nu,\alpha} - g_{\nu,\beta}\Omega_{\mu,\alpha} \\ [\Omega_{\mu,\nu}\partial_\lambda\partial^\lambda] = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

On note $x^0 = t$, $x = (x^1, \ldots, x^n)$. Pour $u$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)$ on définit les normes :

$$\| u(t) \|_{\mathrm{N}}^2 = \sum_{|\lambda| \leqslant \mathrm{N}} \| \Gamma^\lambda u(t) \|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_x^n)}^2, \qquad | u(t) |_{\mathrm{N}} = \sup_{|\lambda| \leqslant \mathrm{N}} | \Gamma^\lambda u(t) |_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}_x^n)} \tag{8}$$

où

$$\mathrm{N} \in \mathbb{N}, \qquad \lambda \in \mathbb{N}^p, \qquad \Gamma^\lambda = \Gamma_1^{\lambda_1} \ldots \Gamma_p^{\lambda_p}.$$

Les opérateurs $\Omega_{\mu,\nu}$ ne commutant pas avec le système de Dirac, on les remplace, dans le cas d'un champ spinoriel sur $\mathbb{R}_1^{3+1}$, par les opérateurs de Fermi :

$$\hat{\Omega}_{\mu,\nu} = \Omega_{\mu,\nu} + \frac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu; \qquad 0 \leqslant \mu, \quad \nu \leqslant 3 \tag{9}$$

qui vérifient :

$$[\hat{\Omega}_{\mu,\nu}, -i\gamma^\lambda\partial_\lambda + \mathrm{M}] = 0. \tag{10}$$

Comme précédemment, on définit les normes $\| \psi(t) \|_N$ et $| \psi(t) |_N$ pour un spineur $\psi$, à l'aide de la famille $(\hat{\Gamma}_\sigma)_{1 \leqslant \sigma \leqslant 10} = (\partial_\mu, \hat{\Omega}_{\mu,\nu})_{0 \leqslant \mu,\nu \leqslant 3}$

$$(11) \quad \| \psi(t) \|_N^2 = \sum_{|\lambda| \leqslant N} \| \hat{\Gamma}^\lambda \psi(t) \|^2_{L^2(\mathbb{R}^3_x)}, \quad | \psi(t) |_N = \sup_{|\lambda| \leqslant N} | \hat{\Gamma}^\lambda \psi(t) |_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x)}.$$

Il est clair que les normes définies par (8) et (11) sont équivalentes.

L'estimation fondamentale due à S. Klainerman [*14*] assure que pour $u$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x)$ on a :

$$(12) \qquad 0 \leqslant t, \qquad | u(t) |_N \leqslant C_N (1 + t)^{-1} \sup_{0 \leqslant s \leqslant 2t} \| u(s) \|_{N+3}.$$

Si $u$ est solution de l'équation de Klein-Gordon de masse non nulle :

$$(13) \qquad \square u + m^2 u = f(t, x), \qquad m \neq 0, \qquad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+3}$$

$$(14) \qquad \operatorname{supp} u \subset \{ (t, x) ; | x | \leqslant | t | + R \}$$

la décroissance est plus rapide : S. Klainerman établit dans [*15*] que, pour tout $\varepsilon > 0$ et $t \geqslant 0$, on a :

$$(15) \quad | u(t) |_N \leqslant C_{N,\varepsilon,R} (1 + t)^{-5/4} ( \| u(0) \|_{N+5} + \sup_{0 \leqslant s} (1 + s)^{1+\varepsilon} \| f(s) \|_{N+4}).$$

Pour résoudre le problème de Cauchy pour (1) (2) sous les hypothèses (H1) (H2) nous avons besoin d'une estimation plus précise :

$$(16) \quad | u(t) |_N \leqslant C_{N,R} (1 + t)^{-3/2} \left( \| u(0) \|_{N+4} + \int_0^{2t} \| f(s) \|_{N+4} ds \right).$$

Ce résultat est démontré dans la première partie ; une inégalité analogue est énoncée par L. Hörmander dans [*12*]. Dans la deuxième partie, on montre que le problème de Cauchy global associé à (1) (2) sous les conditions (4) (H1) et (H2) est bien posé. On étudie l'équation de Dirac en présence d'un potentiel dans la troisième partie ; si une énergie convenable de ce potentiel est uniformément bornée, les solutions sont dispersives ; on obtient en particulier l'existence et la complétude des opérateurs d'ondes pour un électron dans un champ électromagnétique libre. Dans la quatrième partie, on étudie la relation entre la Lorentz-invariance d'une forme sesquilinéaire sur l'espace des spineurs, la notion de compatibilité d'une forme avec le système de Dirac, introduite par B. Hanouzet et J.-L. Joly [*10*], et la condition nulle utilisée par S. Klainerman [*16*]. Les estimations *a priori* obtenues dans les parties III et IV permettent de résoudre dans la cinquième partie le problème de Cauchy global pour le système (1) (2) sous les conditions (4) (H1) et (H3).

L'auteur remercie V. Georgiev d'avoir attiré son attention sur les opérateurs de Fermi qui permettent d'éviter le calcul pseudodifférentiel utilisé dans [*1*].

## I. ESTIMATION $L^2 - L^\infty$ POUR L'ÉQUATION DE KLEIN-GORDON

THÉORÈME I.1. — *Soit u la solution de l'équation de Klein-Gordon :*

$$\Box u + u = f(t, x), \qquad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+n}.$$

*On suppose que le support de u est inclus dans* $\{(t, x) ; |x| \leqslant |t| + R\}$. *Alors il existe une constante* $C_R > 0$ *ne dépendant que de* R, *telle que, pour tout* $t \geqslant 0$ *et tout* $x$, *on ait :*

$$(17) \quad |u(t, x)| \leqslant C_R(1+t)^{-n/2}\left( \| u(0) \|_{[n/2]+3} + \int_0^{2t} \| f(s) \|_{[n/2]+3} ds \right).$$

*Remarque.* — Pour les dimensions $n \leqslant 3$, L. Hörmander a donné dans [*12*] une inégalité analogue ne faisant pas intervenir le futur de la source.

*Preuve.* — Quitte à faire une translation en temps et à donner les conditions initiales à $t = R$, on suppose que :

$$(18) \qquad R \leqslant t \leqslant |x| \Rightarrow u(t, x) = 0.$$

*1^er étape : Estimation de* $u(t, x)$ *pour* $t/2 \leqslant |x| \leqslant t$.

On pose $g(x) = u(\sqrt{\rho^2 + |x|^2}, x)$. D'après [*14*] on a, pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ fixé :

$$|g(x_0)| \leqslant c|x_0|^{-(n-1)/2} \sum_{\substack{|\alpha|, |\beta| \leqslant [(n-1)/2]+1 \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \| \Omega^\alpha g(x) \|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R}^n_x)} \| \partial_i \Omega^\beta g(x) \|^{1/2}_{L^2(|x| \geqslant |x_0|)}$$

où

$$\Omega^\alpha = \prod_{h=1}^{q} \Omega_h^{\alpha_h}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$$

$$(\Omega_h)_{1 \leqslant h \leqslant q} = (\partial_i, \Omega_{i,j})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}.$$

On remarque que :

$$\partial_j g(x) = (\rho^2 + |x|^2)^{-1/2}(\Omega_{0,j}u)(\sqrt{\rho^2 + |x|^2}, x).$$

On en déduit que :

$$(19) \quad |u(\sqrt{\rho^2 + |x_0|^2}, x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant C|x_0|^{-n/2} \sum_{|\lambda| \leqslant [(n-1)/2]+2} \| (\Gamma^\lambda u)(\sqrt{\rho^2 + |x|^2}, x) \|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)}.$$

Grâce aux relations de commutation (7) les fonctions $v = \Gamma^\lambda u$ et $h = \Gamma^\lambda f$ vérifient l'équation :

$$\Box v + v = h$$

et

$$\mathrm{R} \leqslant t \leqslant |x| \Rightarrow v(t, x) = 0 .$$

On introduit le vecteur $\vec{\mathrm{T}} = (|v_t|^2 + |\nabla_x v|^2 + |v|^2, \ -v_t\nabla_x\bar{v} - \bar{v}_t\nabla_x v)$ et on intègre div $\vec{\mathrm{T}} = v_t\bar{h} + \bar{v}_t h$ sur le domaine $\mathscr{D} = \{ \mathrm{R}^2 \leqslant t^2 \leqslant \rho^2 + |x|^2, \mathrm{R} \leqslant t \}$ :

$$\int_{\partial\mathscr{D}} \vec{\mathrm{T}} \cdot \vec{v} d\Sigma = \int_{\mathscr{D}} (v_t\bar{h} + \bar{v}_t h) dt dx$$

où sur l'hyperboloïde $\{ t^2 = \rho^2 + |x|^2 \}$, la normale unitaire sortante $\vec{v}$ est égale à :

$$\vec{v} = (\rho^2 + 2|x|^2)^{-1/2}(\sqrt{\rho^2 + |x|^2}, -x),$$

et la mesure $d\Sigma$ est donnée par :

$$d\Sigma = \frac{\sqrt{\rho^2 + 2|x|^2}}{\sqrt{\rho^2 + |x|^2}} dx .$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \int |v(\sqrt{\rho^2+|x|^2}, x)|^2 dx = & \int (|v_t|^2 + |\nabla_x v|^2 + |v|^2)(\mathrm{R}, x) dx + \\ & + \int_{\mathscr{D}} (v_t\bar{h} + \bar{v}_t h)(t, x) dt dx \\ & - \int \left( |v_t|^2 + |\nabla v|^2 - \frac{v_t\nabla_x\bar{v}\cdot x + \bar{v}_t\nabla_x v\cdot x}{\sqrt{\rho^2+|x|^2}} (\sqrt{\rho^2+|x|^2}, x) dx \right. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale étant positive, il vient :

$$\int |v(\sqrt{\rho^2 + |x|^2}, x)|^2 dx \leqslant \| v(\mathrm{R}) \|_1^2 + 2 \int_{\mathrm{R}}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_x^n} |v_t(t, x)| \, |h(t, x)| \, dt dx .$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz à l'intégrale en $x$ et on utilise (19) :

$$|u(\sqrt{\rho^2 + |x_0|^2}, x_0)| \leqslant \mathrm{C} |x_0|^{-n/2} .$$

$$\left( \| u(\mathrm{R}) \|_{[(n-1)/2]+3}^2 + \sup_{\mathrm{R} \leqslant s} \| u'(s) \|_{[(n-1)/2]+2} \int_{\mathrm{R}}^{\infty} \| f(s) \|_{[(n-1)/2]+2} ds \right)^{1/2}$$

$$u' = (\partial_\mu u)_{0 \leqslant \mu \leqslant n} .$$

L'inégalité standard de l'énergie assure que :

$$\sup_{\mathrm{R} \leqslant s} \| u'(s) \|_{[(n-1)/2]+2} \leqslant \| u(\mathrm{R}) \|_{[(n-1)/2]+3} + \int_{\mathrm{R}}^{\infty} \| f(s) \|_{[(n-1)/2]+2} ds$$

et on conclut que :

(20) $$|u(\sqrt{\rho^2 + |x_0|^2}, x_0)| \leqslant$$
$$\leqslant C|x_0|^{-n/2}\left( \| u(\mathrm{R}) \|_{[(n-1)/2]+3} + \int_{\mathrm{R}}^{\infty} \| f(s) \|_{[(n-1)/2]+2} ds \right)$$

*$2^e$ étape : Estimation de $u(t, x)$ pour $|x| \leqslant t/2$.*

Nous reprenons la technique de [*15*] en écrivant l'équation de Klein-Gordon dans le cône $\{|x| \leqslant t\}$ à l'aide des coordonnées pseudosphériques $\rho = \sqrt{t^2 - |x|^2}$, $\omega = (\omega^0, \omega^1, \ldots, \omega^n) \in \mathrm{H}$, où H est l'hyperboloïde unité $\{\rho = 1\}$. On note $\sigma = \mathrm{H} \cap \{|x| \leqslant t/2\}$ et $\sigma' = \mathrm{H} \cap \{|x| \leqslant t/\sqrt{2}\}$. Sachant que :

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{n}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2}\Delta_{\mathrm{H}}$$

où

$$\Delta_{\mathrm{H}} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \Omega_{0,i}^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \Omega_{i,j}^2$$

l'équation $\square u + u = f$ devient :

(21) $$v_{\rho\rho} + v = k$$

où

$$v = \rho^{n/2}u, \qquad k = \rho^{n/2}\left[\rho^{-2}\left(\Delta_{\mathrm{H}}u + \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)u\right) + f\right].$$

On note $u_0$ et $u_1$ les données de Cauchy à $t = \mathrm{R}$ :

$$u(\mathrm{R}, x) = u_0(x), \qquad \partial_t u(\mathrm{R}, x) = u_1(x).$$

$\omega = (\omega^0, \omega')$ étant fixé dans $\sigma'$, on pose :

$$\rho_0 = \frac{\mathrm{R}}{\omega^0} \in \left[\frac{\mathrm{R}}{\sqrt{2}}, \mathrm{R}\right].$$

On a alors :

$$v(\rho_0\omega) = \rho_0^{n/2}u_0(\rho_0\omega'),$$
$$v_\rho(\rho_0\omega) = \frac{n}{2}\rho_0^{(n/2)-1}u_0(\rho_0\omega') + \rho_0^{n/2}[\omega_0 u_1(\rho_0\omega') + \omega'\cdot\nabla_x u_0(\rho_0\omega')].$$

On multiplie l'équation (21) par $\bar{v}_\rho$ et on intègre de $\rho_0$ à $\rho > \rho_0$ :

$$|v_\rho(\rho\omega)|^2 + |v(\rho\omega)|^2 \leqslant C(|u_0(\rho_0\omega')|^2 + |\nabla_x u_0(\rho_0\omega')|^2 +$$
$$+ |u_1(\rho_0\omega')|^2 + \int_{\mathrm{R}/\sqrt{2}}^{\rho} |k(\lambda\omega)|\,|v_\rho(\lambda\omega)|\,d\lambda\Big).$$

Nous intégrons cette inégalité par rapport à $\omega$ sur $\sigma'$ pour la mesure $d\sigma'(\omega) = (1 + |\omega'|^2)^{-1/2}d\omega'$, $|\omega'| \leqslant 1/\sqrt{2}$. On obtient :

$$(22) \quad \| v(\rho\omega)\|^2_{L^2(\sigma')} \leqslant \left[ \| u(R) \|_1^2 + \int_{R/\sqrt{2}}^{\rho} \int_{\sigma'} | k(\lambda\omega) | \, | v_\rho(\lambda\omega) | \, d\sigma'(\omega)d\lambda \right].$$

Or, on a :

$$| k(\lambda\omega) | \, | v_\rho(\lambda\omega) | \leqslant C\lambda^n [\lambda^{-2}( | \Delta_H u | + | u' | + | u | )^2 + | f | ( | u' | + | u | )](\lambda\omega).$$

Sachant que $dtdx = \lambda^n d\sigma'(\omega)d\lambda$, on évalue :

$$\int_{R\sqrt{2}}^{\rho} \int_{\sigma'} | k(\lambda\omega) | \, | v_\rho(\lambda\omega) | \, d\sigma'(\omega)d\lambda \leqslant$$

$$\leqslant C\left[ \int_{R\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\rho} \int_{|x| \leqslant s/\sqrt{2}} (s^2 - | x |^2)^{-1}( | \Delta_H u | + | u' | + | u | )^2(s, x)dxds \right]$$

$$+ \int_0^{\sqrt{2}\rho} \int_{|x| \leqslant s/\sqrt{2}} | f(s, x) | ( | u' | + | u | )(s, x)dxds$$

$$\leqslant C\left[ \int_{R/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\rho} s^{-2} \| u(s) \|_2^2 ds + \sup_{0 \leqslant s \leqslant \sqrt{2}\rho} \| u(s) \|_1 \int_0^{\sqrt{2}\rho} \| f(s) \|_0 ds \right].$$

L'inégalité d'énergie donne :

$$\sup_{0 \leqslant s \leqslant \sqrt{2}\rho} \| u(s) \|_2 \leqslant \| u(R)\|_2 + \int_0^{\sqrt{2}\rho} \| f(s) \|_2 ds$$

et on a finalement,

$$(23) \qquad \| v(\rho\omega) \|_{L^2(\sigma')} \leqslant C\left[ \| u(R) \|_2 + \int_0^{\sqrt{2}\rho} \| f(s) \|_2 ds \right].$$

On rappelle l'inégalité de Sobolev :

$$| v(\rho\omega) |_{L^\infty(\sigma)} \leqslant C \| v(\rho\omega) \|_{W^{[n/2]+1,2}(\sigma')}$$

qui implique que :

$$| v(\rho\omega) |_{L^\infty(\sigma)} \leqslant C\left[ \| u(R) \|_{[n/2]+3} + \int_0^{\sqrt{2}\rho} \| f(s) \|_{[n/2]+3} ds \right].$$

Ainsi, pour $t \geqslant R$ et $| x | \leqslant t/2$, on a :

$$(24) \quad | u(t, x) | \leqslant C(1 + t)^{-n/2}\left[ \| u(R) \|_{[n/2]+3} + \int_0^{2t} \| f(s) \|_{[n/2]+3} ds \right].$$

On conclut par (20) et (24) que, pour tout $t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(25) \quad | u(t,x) | \leqslant C(1 + t)^{-n/2}\left[ \| u(0) \|_{[n/2]+3} + \int_0^{\infty} \|f(s) \|_{[n/2]+3} ds \right].$$

*3e étape : troncature temporelle de la source.*

On choisit une fonction-test $\theta(t, x)$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ égale à 1 sur un voisinage de $\{ |x| \leqslant 1, |t| \leqslant 1 \}$ et nulle pour $|x|$ ou $|t| \geqslant \sqrt{2}$. $(t_0, x_0)$ étant fixé, tel que $0 \leqslant t_0$ et $|x_0| \leqslant t_0 + R$, on considère la fonction $w$ solution de :

$$\Box w + w = F(t, x) = f(t, x)\theta\left(\frac{t}{R + t_0}, \frac{x}{R + t_0}\right)$$

$u$ et $w$ coïncident pour $|t| \leqslant t_0$ et $|x| \leq R + |t|$, donc $u(t_0, x_0) = w(t_0, x_0)$ et on applique à $w$ l'estimation (25) :

$$|w(t_0, x_0)| \leqslant C(1 + t_0)^{-n/2}\left( \| w(0) \|_{[n/2]+3} + \int_0^\infty \| F(s) \|_{[n/2]+3} ds\right).$$

D'une part,

$$\| w(0) \|_{[n/2]+3} = \| u(0) \|_{[n/2]+3}$$

et, d'autre part,

$$\| F(s) \|_{[n/2]+3} \leqslant C \| f(s) \|_{[n/2]+3} \left| \theta\left(\frac{s}{R + t_0}, \frac{x}{R + t_0}\right)\right|_{[n/2]+3}$$

On vérifie aisément que :

$$\Gamma^\lambda \theta\left(\frac{s}{R+t_0}, \frac{x}{R+t_0}\right) = \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant |\lambda| \\ k \leqslant |\lambda|}} \frac{P_k(s, x)}{(R+t_0)^k} (\partial^\alpha_{t,x}\theta)\left(\frac{s}{R+t_0}, \frac{x}{R+t_0}\right)$$

où $P_k$ est un polynôme de degrés au plus $k$: on en déduit que :

$$\left| \theta\left(\frac{s}{R + t_0}, \frac{x}{R + t_0}\right)\right|_{[n/2]+3} \leqslant C \mathbb{1}_{\{|s| \leqslant \sqrt{2}(R + t_0)\}}(s)$$

et pour $t_0 > R$,

$$\| F(s) \|_{[n/2]+3} \leqslant C \| f(s) \|_{[n/2]+3} \mathbb{1}_{\{|s| \leqslant 2t_0\}}(s)$$

où $C > 0$ est indépendant de $t_0$. On en conclut que pour $t_0 > R$, on a :

$$(26) \quad |u(t_0, x_0)| \leqslant C(1 + t_0)^{-n/2}\left[ \| u(0) \|_{[n/2]+3} + \int_0^{2t_0} \| f(s) \|_{[n/2]+3} ds\right].$$

Pour $0 \leqslant t_0 \leqslant R$ l'injection de Sobolev donne :

$$(27) \quad |u(t_0, x_0)| \leqslant C \| u(t_0) \|_{[n/2]+1} \leqslant C\left[ \| u(0) \|_{[n/2]+1} + \int_0^{t_0} \| f(s) \|_{[n/2]+1} ds\right]$$

ce qui achève la preuve du théorème I.1.

## II. PROBLÈME DE CAUCHY SOUS LES HYPOTHÈSES (H1) ET (H2)

Nous considérons le problème de Cauchy :

(28) $$-i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + M\psi = ig\varphi\gamma^5\psi, \qquad M \neq 0, \qquad g \in \mathbb{R}$$

(29) $$\square\varphi = \tilde{\psi}F\psi, \qquad \tilde{F} = F$$

(30) $$\psi(0,x) = \varepsilon\psi_0(x), \qquad \varphi(0,x) = \varepsilon\varphi_0(x), \qquad \partial_t\varphi(0,x) = \varepsilon\varphi_1(x)$$

(31) $$\psi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3_x, \mathbb{C}^4), \qquad \varphi_0, \qquad \varphi_1 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3_x, \mathbb{R}), \qquad 0 < \varepsilon.$$

THÉORÈME II.1. — *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ ne dépendant que des dérivées des données initiales $\psi_0, \varphi_0, \varphi_1$ jusqu'à l'ordre 26, tel que, pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$, le problème de Cauchy (28) à (31) admet une unique solution globale $(\psi, \varphi)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^4)$.*

Les estimations de la solution assurent en particulier que

$$\| \varphi(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} = 0(\sqrt{t}) \qquad \text{et} \qquad | \psi(t) |_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x)} = 0(t^{-3/2})$$

quand $t \to +\infty$, ainsi l'énergie du second membre de (29) est intégrable sur $\mathbb{R}_t$ et $\varphi$ est asymptotiquement libre; en revanche, on a seulement $\| \varphi\gamma^5\psi(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} = 0(t^{-1})$ et il n'est pas clair que $\psi$ soit asymptotiquement libre; on a cependant la :

PROPOSITION II.1. — *Sous les hypothèses du théorème II.1, il existe $\psi^\pm, \hat{\psi}^\pm, \varphi^\pm$ vérifiant :*

$$\psi^\pm, \hat{\psi}^\pm \in C^0(\mathbb{R}_t, H^{22}(\mathbb{R}^3_x)), \qquad -i\gamma^\mu\partial_\mu\psi^\pm + M\psi^\pm = -i\gamma^\mu\partial_\mu\hat{\psi}^\pm - M\hat{\psi}^\pm = 0$$

$$\partial_\mu\varphi^\pm \in C^0(\mathbb{R}_t, H^{25}(\mathbb{R}^3_x)), \qquad \square\varphi^\pm = 0$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\left( \| \psi(t) - (\psi^\pm(t) + \hat{\psi}^\pm(t)) \|_{H^{22}(\mathbb{R}^3_x)} + \sum_{\mu=0}^{3} \| \partial_\mu\varphi(t) - \partial_\mu\varphi^\pm(t) \|_{H^{25}(\mathbb{R}^3_x)} \right) = 0.$$

*Preuve.* — Pour $N \in \mathbb{N}$, $k, \alpha \in \mathbb{R}$, on définit les normes :

(33) $$\| u \|_{N,k,\alpha} = \sup_{0 \leq t} (1+t)^{-\alpha}(1+\mathrm{Log}(1+t))^{-k} \| u(t) \|_N$$

(34) $$| u |_{N,k,\alpha} = \sup_{0 \leq t} (1+t)^{-\alpha}(1+\mathrm{Log}(1+t))^{-k} | u(t) |_N$$

et pour $N_0$ entier $\geq 8$, on pose :

(35) $$\left\{ \begin{aligned} ||| u ||| = \sup_{0 \leq N \leq N_0} \| u \|_{N,5N,0} + \| u \|_{N_0-4,0,0} &+ \\ + | u |_{N_0-4,5N_0+1,-3/2} &+ | u |_{N_0-8,1,-3/2} \end{aligned} \right.$$

(36) $$\left\{ \begin{aligned} [[u]] = \sup_{1 \leq N \leq N_0} \| u \|_{N,5(N-1)+1,1/2} + | u |_{[N_0/2],4,-1} &+ \\ + \sum_{\mu=0}^{3} ( \| \partial_\mu u \|_{N_0,0,0} &+ | \partial_\mu u |_{[N_0/2],0,-1}). \end{aligned} \right.$$

LEMME II.1. — *Soit $\psi$ une solution de :*

$$(37)\quad -i\gamma^\mu\partial_\mu\psi+M\psi=i\varphi\gamma^5\psi,\qquad M\neq 0,\qquad \operatorname{supp}\psi\subset\{\,|x|\leqslant|t|+R\,\}$$

*où $\varphi$ est une fonction à valeur réelle. Alors pour $N_0 \geqslant 15$, il existe $C > 0$ ne dépendant que de $N_0$ et R tel que :*

$$(38)\qquad |||\,\psi\,||| \leqslant C(1+[[\varphi]])^{N_0}(\,\|\,\psi(0)\,\|_{N_0} + [[\varphi]]\cdot|||\,\psi\,|||\,).$$

LEMME II.2. — *Soit $\varphi$ une solution de :*

$$(39)\qquad \square\varphi = \tilde{\psi}F\psi,\qquad \operatorname{supp}\varphi\subset\{\,|x|\leq|t|+R\,\}$$

*où $\psi$ est une fonction à valeur dans $\mathbb{C}^4$ et F est une matrice $4\times 4$ à coefficients constants. Alors pour $N_0 \geqslant 25$, il existe $C > 0$ ne dépendant que de $N_0$ et R tel que :*

$$(40)\qquad [[\varphi]] \leqslant C(\,\|\,\varphi(0)\,\|_{N_0+1} + |||\,\psi\,|||^2)\,.$$

Admettant ces deux lemmes nous achevons la démonstration du théorème II.1. On suppose que les supports de $\psi_0, \varphi_0, \varphi_1$ sont inclus dans $\{\,|x|\leqslant R\,\}$ et on choisit une fonction-test $\theta$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^3_x)$ égale à 1 si $|t|$ et $|x| \leqslant 1$ et nulle si $|t|$ ou $|x| \geqslant 2$. Pour tout entier $n$ on définit :

$$\theta^n(t,x) = \theta\left(\frac{t}{n},\frac{x}{R+n}\right)$$

et on résoud le problème de Cauchy pour $n \geqslant 0$ :

$$(41)\qquad -\,i\gamma^\mu\partial_\mu\psi^n + M\psi^n = ig\varphi^{n-1}\theta^n\gamma^5\psi^n$$

$$(42)\qquad \square\varphi^n = \tilde{\psi}^{n-1}F\psi^{n-1}$$

$$(43)\qquad \psi^n(0,x) = \varepsilon\psi_0(x),\qquad \varphi^n(0,x) = \varepsilon\varphi_0(x),\qquad \partial_t\varphi^n(0,x) = \varepsilon\varphi_1(x)$$

et on pose :

$$(44)\qquad \psi^{-1} \equiv 0,\qquad \varphi^{-1} \equiv 0\,.$$

On remarque que $\varphi^{n-1}\theta^n=0$ pour $t \geqslant 2n$, et donc la solution $\psi^n \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ de (41) vérifie :

$$-\,i\gamma^\mu\partial_\mu\psi^n + M\psi^n = 0,\qquad t \geqslant 2n\,;$$

on en déduit que :

$$(45)\qquad |||\,\psi^n\,||| < +\,\infty\,.$$

D'autre part, on montre aisément comme dans la troisième étape de la première partie que :

$$\sup_{\substack{1\leqslant n\\ 0\leqslant t}} |\,\theta^n(t)\,|_N < \infty\,.$$

Cela implique que :

$$[[\varphi^{n-1}\theta^n]] \leqslant C[[\varphi^{n-1}]]$$

où $C > 0$ est indépendant de $n$. On choisit $N_0 = 25$ et les lemmes II.1 et II.2 donnent :

$$(46)\quad |||\psi^n||| \leqslant C_0(1 + [[\varphi^{n-1}]])^{25}(\varepsilon + [[\varphi^{n-1}]] \cdot |||\psi^n|||), \qquad 1 \leqslant n,$$

$$(47)\quad [[\varphi^n]] \leqslant C_0(\varepsilon + |||\psi^{n-1}|||^2), \qquad 1 \leqslant n,$$

$$(48)\quad |||\psi^0||| \leqslant C_0\varepsilon, \qquad [[\varphi^0]] \leqslant C_0\varepsilon,$$

où $C_0 > 0$ est indépendant de $n$ et $\varepsilon > 0$. A présent on suppose que $\varepsilon_0 > 0$ est assez petit pour que $0 \leqslant \varepsilon < \varepsilon_0$ vérifie :

$$(49)\qquad 4C_0^2\varepsilon < \sqrt{2} - 1$$

$$(50)\qquad (1 + 2C_0\varepsilon)^{25} < \sqrt{2}.$$

On fait l'hypothèse de récurrence que :

$$(51)\qquad |||\psi^{n-1}||| \leqslant 2C_0\varepsilon, \qquad [[\varphi^{n-1}]] \leqslant 2C_0\varepsilon.$$

On déduit alors de (47) et (49) que :

$$(52)\qquad [[\varphi^n]] \leqslant \sqrt{2}C_0\varepsilon \leqslant 2C_0\varepsilon.$$

D'autre part, (46) et (50) donnent :

$$(53)\qquad |||\psi^n||| \leqslant \sqrt{2}C_0\varepsilon(1 + 2C_0\,|||\psi^n|||);$$

compte tenu de (45), on a alors :

$$(54)\qquad |||\psi^n||| \leqslant \sqrt{2}C_0\varepsilon(1 - 2C_0^2\sqrt{2}\varepsilon_0)^{-1} \leqslant 2C_0\varepsilon.$$

On conclut de (48) (52) et (54) que :

$$(55)\qquad \sup_{0 \leqslant n}(|||\psi^n|||, \quad [[\varphi^n]]) < +\infty.$$

Pour $T > 0$ fixé, la suite $\psi^n$ est bornée dans $C^0(0, T; L^\infty(\mathbb{R}_x^3))$, et pour $n \geqslant 2T$, $\psi^n$ est solution de :

$$-i\gamma^\mu\partial_\mu\psi^n + M\psi^n = ig\varphi^{n-1}\gamma^5\psi^n, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

LEMME II.3. — *Soient* $\psi^n$ *dans* $(C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}_x^3) \cap L^\infty(\mathbb{R}_x^3)))^4$, *et* $\varphi^n$ *dans* $C^1(0, T: L^2(\mathbb{R}_x^3)) \cap C^0(0, T: H^1(\mathbb{R}_x^3))$ *solutions de* :

$$-i\gamma^\mu\partial_\mu^n + M\psi^n = \varphi^{n-1}V\psi^n, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$\Box\varphi^n = \tilde{\psi}^{n-1}F\psi^{n-1},$$

*ou* V *et* F *satisfont* (H1) *et les données initiales à* $t = 0$ *vérifient (31) et (43). On suppose que* $\psi^n$ *est une suite bornée dans* $(C^0(0, T; L^\infty(\mathbb{R}_x^3)))^4$; *alors la suite* $\psi^n$ *converge dans* $(C^0(0, T: L^2(\mathbb{R}_x^3)))^4$ *et la suite* $\varphi^n$ *converge dans* $C^0(0, T; H^1(\mathbb{R}_x^3)) \cap C^1(0, T; L^2(\mathbb{R}_x^3))$ *quand* $n \to \infty$.

Le lemme II.3 implique donc l'existence d'une solution $(\psi, \varphi)$ du problème de Cauchy (28)-(31) dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}_x^3))$; en fait l'estimation (55) assure que $\psi$ est dans $(C^0(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}_x^3)))^4$ et on remarque que si $\psi \in (C^k(\mathbb{R}, H^m(\mathbb{R}_x^3)))^4$,

$2 \leqslant m$, alors $\varphi \in C^k(\mathbb{R}, H^{m+1}(\mathbb{R}^3_x)) \cap C^{k+1}(\mathbb{R}, H^m(\mathbb{R}^3_x))$ et l'équation (1) donne $\psi \in [C^k(\mathbb{R}, H^{m+1}(\mathbb{R}^3_x)) \cap C^{k+1}(\mathbb{R}, H^m(\mathbb{R}^3_x))]^4$. Finalement, $\psi$ et $\varphi$ sont $C^\infty$. L'unicité de la solution est immédiate dans $C^0(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^3_x) \cap L^\infty(\mathbb{R}^3_x))$ ; si $(\psi, \varphi)$ et $(\hat{\psi}, \hat{\varphi})$ sont deux solutions de (1) (2) de mêmes données initiales, (H1) étant vérifiée et $\varphi$, $\hat{\varphi}$ étant réelles, la conservation de la charge donne :

$$0 \leqslant t \leqslant T, \qquad \| \psi(t) - \hat{\psi}(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} \leqslant C(T) \int_0^t \| \varphi(s) - \hat{\varphi}(s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} ds$$

et l'estimation d'énergie de $\varphi$ et $\hat{\varphi}$ implique :

$$0 \leqslant t \leqslant T, \qquad \| \hat{\varphi}(t) - \varphi(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} \leqslant C(T) \int_0^t \| \psi(s) - \hat{\psi}(s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} ds .$$

On conclut par le lemme de Gronwall que $\psi = \hat{\psi}$ et $\varphi = \hat{\varphi}$ ce qui achève la preuve du théorème II.1.

*Preuve du Lemme II.1.* — Pour évaluer $\| \psi(t) \|_N$ il suffit d'estimer $\| \hat{\Omega}_N \psi(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)}$ où $\hat{\Omega}_N$ décrit un ensemble fini d'opérateurs différentiels du type :

$$(56) \qquad \hat{\Omega}_N = \sum_{|\lambda| \leqslant N} C_\lambda \hat{\Gamma}^\lambda, \qquad C_\lambda \in \mathbb{C}, \qquad \hat{\Gamma}^\lambda = \prod_{j=1}^{10} \hat{\Gamma}_j^{\lambda_j}$$

où on rappelle que :

$$(57) \qquad (\hat{\Gamma}_j)_{1 \leqslant j \leqslant 10} = (\partial_\mu, x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu + 1/2 \gamma_\mu \gamma_\nu)_{0 \leqslant \mu, \nu \leqslant 3} .$$

Remarquons que les relations de commutation (3) impliquent :

$$(58) \qquad \hat{\Omega}_N \gamma^5 = \gamma^5 \hat{\Omega}_N .$$

$\hat{\Omega}_N \psi$ est donc solution de :

$$(59) \qquad \left\{ \begin{aligned} -i\gamma^\mu \partial_\mu \hat{\Omega}_N \psi + M \hat{\Omega}_N \psi = ig\varphi\gamma^5 \hat{\Omega}_N \psi + \sum_{k \leqslant [N/2]} \Omega_{N-k} \varphi A_k \Omega_k \psi \\ + \sum_{[N/2]+1 \leqslant k \leqslant N-1} \Omega_{N-k} \varphi A_k \Omega_k \psi , \end{aligned} \right.$$

où les $A_k$ sont des matrices $4 \times 4$ à coefficients constants et dans toute la suite $\Omega_k$ désigne un opérateur différentiel d'ordre $\leqslant k$, construit avec la famille $(\Gamma_j)_{1 \leqslant j \leqslant 10}$ :

$$(60) \qquad \Omega_k = \sum_{|\lambda| \leqslant k} C_\lambda \Gamma^\lambda, \qquad C_\lambda \in \mathbb{C} .$$

$\varphi$ étant réel, la conservation de la charge donne :

$$(61)\quad \| \hat{\Omega}_N \psi(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} \leqslant C\left[ \| \psi(0) \|_N + \int_0^t \| \varphi(s) \|_N \, | \psi(s) |_{[N/2]} + | \varphi(s) |_{[N/2]} \, \| \psi(s) \|_{N-1} ds \right]$$

et ainsi on a :

$$(62)\quad \begin{cases} \| \psi \|_{N,\mathrm{Max}\,(k+h_1+1,k_1+h+1),0} \leqslant C( \| \psi(0) \|_N + \| \varphi \|_{N,k_1,1/2} \\ \qquad \cdot | \psi |_{[N/2],h,-3/2} + | \varphi |_{[N/2],h_1,-1} \cdot \| \psi \|_{N-1,k,0}) . \end{cases}$$

On choisit $h=1$, $k=5(N-1)$, $h_1=4$, $k_1=5(N-1)+1$ et on obtient pour $0 \leqslant N \leqslant N_0$ :

$$(63)\quad \| \psi \|_{N,5N,0} \leqslant C[ \| \psi(0) \|_{N_0} + \sup_{0 \leqslant N \leqslant N} \| \varphi \|_{N,5(N-1)+1,1/2} \cdot | \psi |_{[N_0/2],1,-3/2} + \\ + | \varphi |_{[N_0/2],4,-1} \cdot \| \psi \|_{N-1,5(N-1),0} ] .$$

On sait qu'une suite positive $u_n$ satisfaisant $u_n \leqslant a + bu_{n-1}$, $0 < a, b$ vérifie : $u_n \leqslant a(1+b)^n + b^n u_0$ ; (63) implique donc :

$$(64)\quad \sup_{0 \leqslant N \leqslant N_0} \| \psi \|_{N,5N,0} \leqslant C(1 + [[\varphi]])^{N_0} ( \| \psi(0) \|_{N_0} + [[\varphi]] \cdot ||| \psi ||| )$$

si $[N_0/2] \leqslant N_0 - 8$, i. e. : $15 \leqslant N_0$.

A présent on applique l'opérateur $(- i\gamma^\mu \partial_\mu - M)$ à l'équation (1) en rappelant que $\gamma^\mu \gamma^5 = - \gamma^5 \gamma^\mu$, $0 \leqslant \mu \leqslant 3$; $\psi$ est donc solution de l'équation non linéaire de Klein-Gordon :

$$(65)\quad \square \psi + M^2 \psi = - g(\partial_\mu \varphi) \gamma^\mu \gamma^5 \psi + g^2 \varphi^2 \psi .$$

On remarque que dans la partie quadratique de la non-linéarité de (65), le champ $\varphi$ n'intervient que par ses dérivées dont il est aisé d'estimer les normes $L^2$. On applique le théorème I.1 :

$$(66)\quad | \psi(t) |_N \leqslant C(1+t)^{-1/2} \left[ \| \psi(0) \|_{N+4} + \int_0^{2t} f(s) ds \right]$$

où

$$f(s) = \| \varphi'(s) \|_{N+4} \, | \psi(s) |_{[N+4/2]} + | \varphi'(s) |_{[N+4/2]} \, \| \psi(s) \|_{N+4} + \\ + | \varphi(s) |^2_{[N+4/2]} \, \| \psi(s) \|_{N+4} + | \varphi(s) |_{[N+4/2]} \, \| \psi(s) \|_{[N+4]} .$$

On en déduit que :

$$(67)\quad \begin{cases} | \psi |_{N_0-4,5N_0+1,-3/2} \leqslant C[ \| \psi(0) \|_{N_0} + \| \varphi' \|_{N_0,0,0} \cdot | \psi |_{[N_0/2],1,-3/2} + \\ \qquad + | \varphi' |_{[N_0/2],0,-1} \cdot \| \psi \|_{N_0,5N_0,0} + | \varphi |^2_{[N_0/2],4,-1} \cdot \| \psi \|_{N_0,5N_0,0} + \\ \qquad + | \varphi |_{[N_0/2],4,-1} \cdot \| \varphi \|_{N_0,5(N_0-1)+1,1/2} \cdot | \psi |_{[N_0/2],1,-3/2} ] . \end{cases}$$

Pour $N_0 \geqslant 15$ on a $[N_0/2] \leqslant N_0 - 8$ et ainsi :

$$(68)\quad | \psi |_{N_0-4,5N_0+1,-3/2} \leqslant C(1 + [[\varphi]]) ( \| \psi(0) \|_{N_0} + [[\varphi]] \cdot ||| \psi ||| ) .$$

Maintenant l'estimation de l'énergie standard sur l'équation (65) donne :

$$(69)\quad \left\{ \begin{aligned} &\| \psi(t) \|_{\mathrm{N}} \leqslant \mathrm{C}\Big[ \| \psi(0) \|_{\mathrm{N}} + \int_0^t \| \varphi'(s) \|_{\mathrm{N}} \, | \psi(s) |_{\mathrm{N}} + \\ &\qquad + \| \varphi(s) \|_{\mathrm{N}} \, | \varphi(s) |_{[\mathrm{N}/2]} \, | \psi(s) |_{\mathrm{N}} ds \Big]. \end{aligned} \right.$$

En prenant $\mathrm{N} = \mathrm{N}_0 - 4$ dans (69) on obtient :

$$\begin{aligned} \| \psi \|_{\mathrm{N}_0-4,0,0} \leqslant \mathrm{C}[\| \psi(0) \|_{\mathrm{N}_0} &+ \| \varphi' \|_{\mathrm{N}_0,0,0} \cdot | \psi |_{\mathrm{N}_0-4,5\mathrm{N}_0+1,-3/2} + \\ &+ \| \varphi \|_{\mathrm{N}_0,5(\mathrm{N}_0-1)+1,1/2} \cdot | \varphi |_{[\mathrm{N}_0/2],4,-1} \cdot | \psi |_{\mathrm{N}_0-4,5\mathrm{N}_0+1,-3/2} ] \end{aligned}$$

et ainsi

$$(70)\qquad \| \psi \|_{\mathrm{N}_0-4,0,0} \leqslant \mathrm{C}(1 + [[\varphi]])( \| \psi(0) \|_{\mathrm{N}_0} + [[\varphi]] \cdot ||| \psi ||| ).$$

On utilise de nouveau (66) avec $\mathrm{N} = \mathrm{N}_0 - 8$ :

$$\begin{aligned} | \psi |_{\mathrm{N}_0-8,1,-3/2} \leqslant \mathrm{C}[ \| \psi(0) \|_{\mathrm{N}_0} &+ \| \varphi' \|_{\mathrm{N}_0,0,0} \cdot | \psi |_{[\mathrm{N}_0/2],1,-3/2} \\ &+ | \varphi' |_{[\mathrm{N}_0/2],0,-1} \cdot \| \psi \|_{\mathrm{N}_0-4,0,0} + | \varphi |_{[\mathrm{N}_0/2],4,-1} \cdot \| \psi \|_{\mathrm{N}_0-4,0,0} \\ &+ | \varphi |_{[\mathrm{N}_0/2],4,-1} \cdot \| \varphi \|_{\mathrm{N}_0,5(\mathrm{N}_0-1)+1,1/2} \cdot | \psi |_{[\mathrm{N}_0/2],1,-3/2]} \end{aligned}$$

et il vient :

$$(71)\qquad | \psi |_{\mathrm{N}_0-8,1,-3/2} \leqslant \mathrm{C}(1 + [[\varphi]])( \| \psi(0) \|_{\mathrm{N}_0} + [[\varphi]] \cdot ||| \psi ||| ).$$

L'inégalité (38) suit de (64) (68) (70) et (71). Q.E.D.

*Preuve du Lemme II.2.* — L'estimation d'énergie classique assure que :

$$\| \varphi'(t) \|_{\mathrm{N}} \leqslant \mathrm{C}\left( \| \varphi'(0) \|_{\mathrm{N}} + \int_0^t \| \psi(s) \|_{\mathrm{N}} \cdot | \psi(s) |_{[\mathrm{N}/2]} ds \right).$$

On en déduit que :

$$(72)\qquad \| \varphi' \|_{\mathrm{N},0,0} \leqslant \mathrm{C}_{k,h}( \| \varphi'(0) \|_{\mathrm{N}} + \| \psi \|_{\mathrm{N},k,0} \cdot | \psi |_{[\mathrm{N}/2],h,-3/2})$$

et l'inégalité (12) implique :

$$(73)\qquad | \varphi' |_{\mathrm{N}-3,0,-1} \leqslant \mathrm{C}_{k,h}( \| \varphi'(0) \|_{\mathrm{N}} + \| \psi \|_{\mathrm{N},k,0} \cdot | \psi |_{[\mathrm{N}/2],h,-3/2}).$$

On conclut de (72) et (75) que :

$$(74)\qquad \sum_{\mu=0}^{3} ( \| \partial_\mu \varphi \|_{\mathrm{N}_0,0,0} + | \partial_\mu \varphi |_{[\mathrm{N}_0/2],0,-1}) \leqslant \mathrm{C}( \| \varphi(0) \|_{\mathrm{N}_0+1} + ||| \psi |||^2).$$

Nous estimons maintenant $\| \varphi(t) \|_{\mathrm{N}}$ à l'aide de l'inégalité d'énergie de [*16*] :

$$(75)\qquad \| \varphi(t) \|_{\mathrm{N}} \leqslant \mathrm{C}\left( \| \varphi(0) \|_{\mathrm{N}} + \int_0^t (1+s) \| \psi(s) \|_{\mathrm{N}-1} \cdot | \psi(s) |_{[(\mathrm{N}-1)/2]} ds \right)$$

ce qui donne :

$$(76) \qquad \| \varphi \|_{N,k+h,1/2} \leqslant C( \| \varphi(0) \|_N + \| \psi \|_{N-1,k,0} \cdot | \psi |_{[(N-1)/2],h,-3/2}) .$$

En prenant $k = 5(N - 1)$ et $h = 1$ dans (76) on obtient :

$$(77) \qquad \sup_{1 \leqslant N \leqslant N_0} \| \varphi \|_{N,5(N-1)+1,1/2} \leqslant C( \| \varphi(0) \|_{N_0} + ||| \psi |||^2 ) .$$

A présent on note $\varphi^0(t, x)$ la solution de :

$$\square \varphi^0 = 0, \qquad \varphi^0(0, x) = \varphi(0, x), \qquad \partial_t \varphi^0(0, x) = \partial_t \varphi(0, x) .$$

On écrit :

$$(78) \quad \varphi(t, x) = \varphi^0(t, x) \frac{1}{4\pi} \int_0^t \frac{1}{t-s} \left( \int_{|x-y|=t-s} \tilde{\psi}(s, y) F \psi(s, y) d\Sigma(y) \right) ds$$
$$= \varphi^0(t, x) + \Phi(t, x) .$$

D'une part l'inégalité (12) donne :

$$(79) \qquad | \varphi^0(t, x) | \leqslant C(1+t)^{-1} \| \varphi^0(0) \|_3$$

et

$$(80) \qquad \| \varphi^0(0) \|_3 \leqslant C( \| \varphi(0) \|_3 + \| \psi(0) \|_3 \, | \psi(0) |_1 ) .$$

On conclut que :

$$(81) \qquad | \varphi^0 |_{[N_0/2],0,-1} \leqslant C( \| \varphi(0) \|_{N_0} + ||| \psi |||^2 ) .$$

Évaluons maintenant $\Phi(t, x)$ pour :

$$(82) \qquad 2R + 1 \leqslant t, \qquad | x | \leqslant t/2 ;$$

on remarque que pour $0 \leqslant s \leqslant t/4 - R/2$, on a :

$$(83) \qquad | x - y | = t - s \Rightarrow | y | \geqslant s + R \Rightarrow \psi(s, y) = 0 ;$$

donc pour $t$ et $x$ vérifiant (82), $\Phi(t, x)$ s'écrit :

$$(84) \quad \Phi(t, x) = \frac{1}{4\pi} \int_{t/4-R/2}^t (t - s)^{-1} \left( \int_{|x-y|=t-s} \tilde{\psi}(s, y) F \psi(s, y) d\Sigma(y) \right) ds .$$

Or, on a :

$$(85) \quad \left| \int_{|x-y|=t-s} \tilde{\psi}(s, y) F \psi(s, y) d\Sigma(y) \right|$$
$$\leqslant C(t - s)^2 (1+s)^{-3} (1 + \mathrm{Log}\,(1 + s))^{2h} \, | \psi |_{0,h,-3/2}^2 .$$

On déduit de (84) et (85) que :

$$(86) \quad 2R + 1 \leqslant t, \qquad | x | \leqslant t/2 \Rightarrow | \Phi(t, x) |$$
$$\leqslant C(1+t)^{-1} (1 + \mathrm{Log}\,(1+t))^{2h} \, | \psi |_{0,h,-3/2}^2 .$$

Pour $2R + 1 \leqslant t$ et $t/2 \leqslant |x|$ on utilise les estimations suivantes de S. Klainerman [*16*] :

$$(87) \qquad |\Phi(t,x)| \leqslant C(1+t)^{-1} \sum_{|\lambda|\leqslant 4} \left\| \frac{1}{|x|} \Gamma^{\lambda}\Phi'(t) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^3_x)}$$

$$(88) \qquad \left\| \frac{1}{|x|} \Phi'(t) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^3_x)}$$
$$\leqslant C \sum_{j=1}^{10} \int_0^t ds \left[ \int \frac{1}{|x|}\left(1 + \operatorname{Log} \frac{t-s+|x|}{|t-s-|x||}\right) |\Gamma_j(\tilde{\psi}(s,x)F\psi(s,x)| \, dx \right].$$

On tire de (87) et (88) :

$$(89) \qquad |\Phi(t,x)| \leqslant C(1+t)^{-1}(1+\operatorname{Log}(1+t)^{2h}I(t)\,|\psi|^2_{5,h,-3/2}$$

où

$$(90) \qquad I(t) = \int_0^t (1+s)^{-3}\left[\int_0^{s+R} \rho\left(1+\operatorname{Log}\frac{t-s+\rho}{|t-s-\rho|}\right)d\rho\right]ds.$$

On évalue $I(t)$ :

$$(91) \qquad I(t) \leqslant C\left[\operatorname{Log}(1+t) + \int_0^t (1+s)^{-2}\left[\int_0^{s+R} \operatorname{Log}(t-s+\rho)d\rho\right]ds - \right.$$
$$\left. - \int_0^t (1+s)^{-2}\left[\int_0^{s+R} \operatorname{Log}|t-s-\rho|\,d\rho\right]ds\right].$$

On a, d'autre part,

$$(92) \qquad \int_0^t (1+s)^{-2}\left[\int_0^{s+R} \operatorname{Log}(t-s+\rho)d\rho\right]ds \leqslant C(\operatorname{Log}(1+t))^2.$$

On étudie d'autre part,

$$(93) \qquad \mathscr{I} = -\int_0^t (1+s)^{-2}\left[\int_0^{s+R} \operatorname{Log}|t-s-\rho|\,d\rho\right]ds.$$

Tout d'abord on a, pour $2R + 1 \leqslant t$ :

$$(94) \qquad \mathscr{I}_1 = -\int_0^{(t-R)/2} (1+s)^{-2}\left[\int_0^{s+R} \operatorname{Log}(t-s-\rho)d\rho\right]ds$$
$$\leqslant -C\int_{(t-R-1)/2}^{(t-R)/2} (1+s)^{-1}\operatorname{Log}(t-2s-R)ds \leqslant C'(1+t)^{-1}.$$

Maintenant on écrit :

$$(95)\quad \left\{\begin{aligned} \mathscr{I}_2 &= -\int_{(t-\mathrm{R})/2}^{t}(1+s)^{-2}\left[\int_0^{t-s}\mathrm{Log}\,(t-s-\rho)d\rho \right.\\ &\qquad\qquad \left. + \int_{t-s}^{s+\mathrm{R}}\mathrm{Log}\,(\rho+s-t)d\rho\right]ds \\ &= -\int_{(t-\mathrm{R})/2}^{t}(1+s)^{-2}\,[(t-s)\,\mathrm{Log}\,(t-s)+(t-s)+(2s+\mathrm{R}-t)\,. \\ &\qquad\qquad \mathrm{Log}\,(2s+\mathrm{R}-t)+(t-\mathrm{R}-2s)]ds \\ &\leqslant -\int_{t-1}^{t}(1+s)^{-2}(t-s)\ \mathrm{Log}\ (t-s)ds-\int_{(t-\mathrm{R})/2}^{(t-\mathrm{R}/2)+1}(1+s)^{-2}(2s+\mathrm{R}-t) \\ &\qquad\qquad \mathrm{Log}\ (2s+\mathrm{R}-t)ds-\int_{(t-\mathrm{R})/2}^{t}(1+s)^{-2}(t-\mathrm{R}-2s)ds\,. \end{aligned}\right.$$

$$(96)\qquad \mathscr{I}_2 \leqslant \mathrm{C}''\,.$$

On déduit de (91) (92) (94) et (96) que :

$$(97)\qquad \mathrm{I}(t) \leqslant \mathrm{C}(1 + \mathrm{Log}\,(1 + t))^2$$

et finalement pour $2\mathrm{R} + 1 \leqslant t \leqslant 2\,|\,x\,|$ on a :

$$(98)\qquad |\,\Phi(t, x)\,| \leqslant \mathrm{C}(1+t)^{-1}(1+\mathrm{Log}\,(1+t))^{2h+2}\,|\,\psi\,|^2_{5,h,-3/2}\,.$$

Pour estimer $\Phi(t, x)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\mathrm{R} + 1$ on écrit l'injection de Sobolev

$$|\,\Phi(t, x)\,| \leqslant \mathrm{C}\,\|\,\Phi(t)\,\|_2$$

et l'estimation d'énergie

$$\|\,\Phi(t)\,\|_2 \leqslant \mathrm{C}\int_0^t (1+s)\,\|\,\psi(s)\|_1\,|\,\psi(s)\,|_0 ds$$

et donc pour $0 \leqslant t \leqslant 2\mathrm{R} + 1$, on a :

$$(99)\qquad |\,\Phi(t, x)\,| \leqslant \mathrm{C}\,\|\,\psi\,\|_{1,k,0}\,|\,\psi\,|_{0,h,\,-3/2}\,.$$

(89) (98) et (99) impliquent si $\mathrm{N}_0 \leqslant 25$ :

$$(100)\qquad |\,\Phi(t)\,|_{[\mathrm{N}_0/2],4,-1} \leqslant \mathrm{C}\,|||\,\psi\,|||^2$$

et (40) suit de (74), (77), (81) et (100). Q.E.D.

*Preuve du Lemme II.3.* — On écrit :

$$(101)\quad -i\gamma^\mu\partial_\mu(\psi^{n+1}-\psi^n)+\mathrm{M}(\psi^{n+1}-\psi)=\varphi^n\mathrm{V}(\psi^{n+1}-\psi^n)+(\varphi^n-\varphi^{n-1})\mathrm{V}\psi^n$$

$$(102)\qquad \Box\,(\varphi^{n+1}-\varphi^n)=(\tilde{\psi}^n-\tilde{\psi}^{n-1})\mathrm{F}\psi^n+\tilde{\psi}^{n-1}\mathrm{F}(\psi^n-\psi^{n-1})\,.$$

$\varphi^n$ étant réel et V satisfaisant (H1), la conversation de la charge pour (101) donne pour $0 \leqslant t \leqslant \mathrm{T}$ :

$$(103)\quad \sup_{0\leqslant s\leqslant t}\|\,\psi^{n+1}(s)-\psi^n(s)\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3_x)}\leqslant|\,\mathrm{V}\,|\,\mathrm{A}\int_0^t \sup_{0\leqslant s\leqslant\sigma}\|\,\varphi^n(s)-\varphi^{n-1}(s)\,\|_{\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3_x)}d\sigma$$

et l'estimation d'énergie appliquée à (102) assure que :

(104) $$\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \| \varphi^{n+1}(s) - \varphi^n(s) \|_{H^1(\mathbb{R}^3_x)} + \| \partial_t \varphi^{n+1}(s) - \partial_t \varphi^n(s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} \leqslant$$
$$\leqslant C_T \mid F \mid A \int_0^t \sup_{0 \leqslant s \leqslant \sigma} \| \psi^n(s) - \psi^{n-1}(s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)}$$

où

(105) $$A = \sup_{0 \leqslant n} \sup_{0 \leqslant s \leqslant T} | \psi^n(s) |_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x)}$$

Posons :

$$\Delta_n(t) = \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} ( \| \psi^{n+1}(s) - \psi^n(s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} + \| \varphi^{n+1}(s) - \varphi^n(s) \|_{H^1(\mathbb{R}^3_x)} +$$
$$+ \| \partial_t \varphi^{n+1}(s) - \partial_t \varphi^n(s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} ) .$$

(103) et (104) impliquent que pour $0 \leqslant t \leqslant T$ :

(106) $$\Delta_n(t) \leqslant C_0 \int_0^t \Delta_{n-1}(\sigma) d\sigma$$

où $C_0$ est indépendant de $n$ et $t$. (106) entraîne que :

(107) $$\Delta_n(t) \leqslant \frac{C_0^n}{n\,!} \Delta_0(T)$$

ce qui montre que $\psi^n$ converge dans $C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}^3_x))$ et $\varphi^n$ converge dans $C^0(0, T; H^1(\mathbb{R}^3_x)) \cap C^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^3_x))$ quand $n \to \infty$. Q.E.D.

*Preuve de la proposition II.1.* — Nous introduisons les groupes unitaires $U_M(t)$ et $U_0(t)$ associés aux équations de Klein-Gordon et des ondes :

$$\Box \psi + M^2 \psi = 0, \quad \psi(0, x) = \psi_0(x), \quad \partial_t \psi(0, x) = \psi_1(x), \quad \psi(t, x) = U_M(t)(\psi_0, \psi_1)$$
$$\Box \varphi = 0, \quad \varphi(0, x) = \varphi_0(x), \quad \partial_t \varphi(0, x) = \varphi_1(x), \quad \varphi(t, x) = U_0(t)(\varphi_0, \varphi_1) .$$

On pose :

$$U_M(-t)(\psi(t), \quad \partial_t \psi(t)) = (f(t), g(t))$$
$$U_0(-t)(\varphi(t), \quad \partial_t \varphi(t)) = (u(t), v(t)) .$$

En tenant compte de l'équation (65) on a :

$$(f(t), g(t)) - (f(s), g(s)) = \int_s^t U_M(-s)(0, g(\partial_\mu \varphi(s)) \gamma^5 \gamma^\mu \psi(s) + g^2 \varphi^2(s) \psi(s)) ds$$

et aussi

$$(u(t), v(t)) - (u(s), v(s)) = \int_s^t U_0(-s)(0, \tilde{\psi}(s) F \psi(s)) ds .$$

On en déduit que :

$$\| f(t) - f(s) \|_{H^{22}(\mathbb{R}^3_x)} + \| g(t) - g(s) \|_{H^{21}(\mathbb{R}^3_x)} \leqslant$$
$$\leqslant C \left| \int_s^t \| (\partial_\mu \varphi(s)) \gamma^5 \gamma^\mu \psi(s) \|_{H^{21}(\mathbb{R}^3_x)} + \| \varphi^2(s) \psi(s) \|_{H^{21}(\mathbb{R}^3_x)} ds \right|$$

et

$$\| \nabla_x u(t) - \nabla_x u(s) \|_{H^{25}(\mathbb{R}_x^3)} + \| v(t) - v(s) \|_{H^{25}(\mathbb{R}_x^3)} \leqslant C \left| \int_s^t \| \tilde{\psi}(s) F \psi(s) \|_{H^{25}(\mathbb{R}_x^3)} ds \right| .$$

On remarque que les normes $|||\cdot|||$ et $[[\cdot]]$ définissent des espaces duals d'espaces de Banach si bien qu'en tenant compte de (55), on a :

$$||| \psi ||| \leqslant \liminf_n ||| \psi^n ||| < +\infty$$

$$[[\varphi]] \leqslant \liminf_n [[\varphi^n]] < +\infty .$$

On en déduit que :

$$\| (\partial_\mu \varphi(s)) \gamma^5 \gamma^\mu \psi(s) \|_{H^{21}(\mathbb{R}_x^3)} + \| \varphi^2(s) \psi(s) \|_{H^{21}(\mathbb{R}_x^3)} \leqslant C(1+s)^{-1/2+\varepsilon}, \qquad 0 < \varepsilon < 1/2$$

et

$$\| \tilde{\psi}(s) F \psi(s) \|_{H^{25}(\mathbb{R}_x^3)} \leqslant C(1+s)^{-1/2+\varepsilon}, \qquad 0 < \varepsilon < 1/2 .$$

On conclut que les limites suivantes existent :

$$\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = f^\pm \in (H^{22}(\mathbb{R}_x^3))^4$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} g(t) = g^\pm \in (H^{21}(\mathbb{R}_x^3))^4$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} u(t) = u^\pm ; \quad \nabla_x u^\pm \in H^{25}(\mathbb{R}_x^3)$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} v(t) = v^\pm \in H^{25}(\mathbb{R}_x^3) .$$

A présent, considérons le système :

$$\begin{cases} f_1^\pm + \hat{f}_1^\pm = f^\pm , \\ \left( \sum_{j=1}^{3} \gamma^j \gamma^0 \partial_j - i M \gamma^0 \right) f_1^\pm + \left( \sum_{j=1}^{3} \gamma^j \gamma^0 \partial_j + i M \gamma^0 \right) \hat{f}_1^\pm = g^\pm . \end{cases}$$

M étant non nul, ce système admet une unique solution, $f_1^\pm$, $\hat{f}_1^\pm$ dans $(H^{22}(\mathbb{R}_x^3))^4$. On pose :

$$\psi^\pm(t) = \left[ U_M(t) \left( f_1^\pm, \sum_{j=1}^{3} \gamma^j \gamma^0 \partial_j f_1^\pm - i M \gamma^0 f_1^\pm \right) \right]_1$$

$$\hat{\psi}^\pm(t) = \left[ U_M(t) \left( \hat{f}_1^\pm, \sum_{j=1}^{3} \gamma^j \gamma^0 \partial_j \hat{f}_1^\pm + i M \gamma^0 \hat{f}_1^\pm \right) \right]_1$$

$$\varphi^\pm(t) = [U_0(t)(u^\pm, v^\pm)] .$$

Il est clair que ces fonctions vérifient :

$$\psi^{\pm}, \quad \hat{\psi}^{\pm} \in C^0(\mathbb{R}_t(H^{22}(\mathbb{R}_x^3))^4), \quad \partial_\mu\varphi^{\pm} \in C^0(\mathbb{R}_t, H^{25}(\mathbb{R}_x^3))$$
$$(-i\gamma^\mu\partial_\mu + M)\psi^{\pm} = 0, \quad (-i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\hat{\psi}^{\pm} = 0, \quad \Box\varphi^{\pm} = 0$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} (\| \psi(t) - (\psi^{\pm}(t) + \hat{\psi}^{\pm}(t)) \|_{H^{22}(\mathbb{R}_x^3)} + \sum_{\mu=0}^{3} \| \partial_\mu\varphi(t) - \partial_\mu\varphi^{\pm}(t) \|_{H^{25}(\mathbb{R}_x^3)} = 0.$$

Q.E.D.

## III. ESTIMATIONS POUR L'ÉQUATION DE DIRAC AVEC UN POTENTIEL

Nous considérons le système linéaire de Dirac :

$$-i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + M\psi = V(t, x)\psi, \qquad M \neq 0 \tag{108}$$

où le potentiel $V(t, x)$ est une matrice $4 \times 4$ à coefficients variables dans $\mathbb{C}$ et vérifiant :

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^{1+3}, \qquad \tilde{V}(t, x)\gamma^0 = \gamma^0 V t, x) \tag{109}$$

et pour des entiers $N_0$ et $h$ fixés

$$\| V \|_{N_0,h,0} < +\infty \tag{110}$$

où $\| \quad \|_{N_0,h,0}$ est donné par (33).

*Exemple.* — (Champ électromagnétique libre).

On pose $V = eA_\mu\gamma^\mu$ où $e$ est une constante réelle et $A_\mu$ est un champ vectoriel réel vérifiant :

$$\Box A_\mu = 0, \qquad A_\mu |_{t=0} \in H^{N_0}_{\text{compact}}(\mathbb{R}_x^3), \qquad \partial_t A_\mu |_{t=0} \in H^{N_0-1}_{\text{compact}}(\mathbb{R}_x^3).$$

La condition (109) assure que la charge de $\psi$ est conservée :

$$\int_{\mathbb{R}_x^3} | \psi(t, x) |^2 dx = \text{constante}. \tag{111}$$

THÉORÈME III.1. — *Soit $\psi$ une solution de (108) de support inclus dans $\{(t, x) ; | x | \leqslant | t | + R\}$. On suppose que le potentiel V satisfait (109) et (110) pour un certain $N_0 \geqslant 8$. Alors il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de R, $N_0$ et $h$ telle que :*

$$\|\psi\|_{N_0-7,0,0} + |\psi|_{N_0-8,(N_0-2)(h+1),-3/2} \leqslant C \| \psi(0) \|_{N_0} (1 + \| V \|_{N_0,h,0})^{N_0-1} \tag{112}$$

*où les normes $\| \quad \|_{N,k,\alpha}$ et $| \quad |_{N,h,\alpha}$ sont données par (33) et (34) ; de plus, si $N_0$ est supérieur ou égal à 10, on a :*

$$\| \psi \|_{N_0,7(h+1),0} \leqslant C \| \psi(0) \|_{N_0} (1 + \| V \|_{N_0,h,0})^{N_0+6}. \tag{113}$$

On peut déduire de ce résultat l'existence et la complétude des opérateurs d'ondes et de diffusion pour le système (108). Ce problème a été étudié dans [*13*] pour des systèmes plus généraux, mais sous l'hypothèse que le potentiel se stabilise suffisamment vite à l'infini, $\int |V(t)-V(\infty)|_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x)}dt < \infty$, ce qui ne permet pas de considérer deux cas physiquement intéressants :

*i*) le potentiel périodique en temps, étudié en collaboration avec V. Petkov dans [*4*].

*ii*) le champ électromagnétique libre pour lequel (12) et (110) entraînent seulement que $|V(t)|_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x)} = 0(|t|^{-1})$ ; ce dernier cas est résolu par le théorème III.2 suivant.

On note $U(t, s)$ le propagateur unitaire sur $(L^2(\mathbb{R}^3_x))^4$ associé au système (108) :

$$U(t, s)\psi(s) = \psi(t)$$

et $U_0(t)$ désigne le groupe unitaire associé au système libre :

$$- i\gamma^\mu\partial_u\psi + M\psi = 0 .$$

Pour $\psi$ dans $(L^2(\mathbb{R}^3_x))^4$ on définit :

$$\begin{aligned} W_-\psi &= \lim_{t\to+\infty} U(0, -t)U_0(-t)\psi \\ W\psi &= \lim_{t\to+\infty} U_0(-t)U(t, 0)\psi \\ S &= W \circ W_- \end{aligned}$$

où les convergences sont prises au sens de la norme de $(L^2(\mathbb{R}^3_x))^4$. L'existence de $W_-\psi$ et $W\psi$ exprime respectivement que le problème de Cauchy associé à (108) est bien posé à $t = -\infty$, et que la solution est asymptotiquement libre.

THÉORÈME III.2. — *On suppose que le potentiel* V *satisfait les conditions (109) et (110) pour* $N_0 = 8$. *Alors les opérateurs* $W_-$, W, S *sont des isométries définies sur tout* $(L^2(\mathbb{R}^3_x))^4$.

*Preuve du théorème III.1.* — La démonstration comporte quatre étapes : 1) estimation logarithmique de $\| \psi(t) \|_{N_0-3}$ ; 2) décroissance $L^\infty$ ; 3) bornage de $\| \psi(t) \|_{N_0-7}$ ; 4) estimation logarithmique de $\| \psi(t) \|_{N_0}$.

Comme dans la preuve du lemme II.1, nous estimons $\| \hat{\Omega}_N(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)}$ où $\hat{\Omega}_N$ est donné par (56). On remarque que la partie principale de l'opérateur différentiel 4 × 4, $\hat{\Omega}_N$ est diagonale et que l'on a :

$$\hat{\Omega}_N = \Omega_N + \sum_{k \leqslant N-1} A_k\Omega_k \tag{114}$$

où les $A_k$ sont des matrices $4 \times 4$ à coefficients constants et $\Omega_N$ et $\Omega_k$ sont définis par (60). On en déduit que :

$$\hat{\Omega}_N(V\psi) = V\hat{\Omega}_N\psi + \sum_{k \leqslant N-1} A_k\Omega_{N-k}V \cdot A'_k\Omega_k\psi \tag{115}$$

où $A_k$ et $A'_k$ sont encore des matrices $4 \times 4$ à coefficients constants. (109) et (111) donnent alors :

$$\| \hat{\Omega}_N\psi(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} \leqslant C\left( \| \psi(0) \|_N + \int_0^t \sum_{k \leqslant N-1} \| \Omega_{N-k}V \cdot A'_k\Omega_k\psi(s) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} ds \right)$$

ce qui implique que :

$$\| \psi(t) \|_N \leqslant C\left( \| \psi(0) \|_N + \int_0^t \sum_{k \leqslant N-1} \| \, | \Omega_{N-k}V(s) | \cdot | \Omega_k\psi(s) | \, \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} ds \right). \tag{116}$$

Il vient en particulier

$$\| \psi(t) \|_N \leqslant C\left( \| \psi(0) \|_N + \int_0^t | V(s) |_N \, \| \psi(s) \|_{N-1} ds \right);$$

l'hypothèse (110) et l'inégalité (12) entraînent que pour $N \leqslant N_0 - 3$, on a :

$$\| \psi \|_{N,h+k+1,0} \leqslant C( \| \psi(0) \|_{N_0} + \| V \|_{N_0,h,0} \| \psi \|_{N-1,k,0} .$$

On prend $k = (N - 1)(h + 1)$ et il vient :

$$\| \psi \|_{N,N(h+1),0} \leqslant \| C( \| \psi(0) \|_{N_0} + \| V \|_{N_0,h,0} \| \psi \|_{N-1,(N-1)(h+1),0}) . \tag{117}$$

On conclut par la conservation de la charge (111) et par (117) que :

$$\| \psi \|_{N_0-3,(N_0-3)(h+1),0} \leqslant C \| \psi(0) \|_{N_0}(1 + \| V \|_{N_0,h,0})^{N_0-3} . \tag{118}$$

Pour estimer $| \psi(t) |_N$, nous appliquons le théorème I.1 :

$$| \psi(t) |_N \leqslant C(1+t)^{-3/2}\left( \| \psi(0) \|_{N+4} + \int_0^{2t} \| V(s)\psi(s) \|_{N+5} ds \right).$$

On choisit $N = N_0 - 8$ et on écrit :

$$\begin{aligned} \| V(s)\psi(s) \|_{N_0-3} &\leqslant C \, | V(s) |_{N_0-3} \| \psi(s) \|_{N_0-3} \\ &\leqslant C(1+s)^{-1}(1+\mathrm{Log}(1+s))^{(N_0-3)(h+1)+h} \| V \|_{N_0,h,0} \| \psi \|_{N_0-3,(N_0-3)(h+1),0} . \end{aligned}$$

(118) et (119) impliquent alors :

$$| \psi |_{N_0-8,(N_0-2)(h+1),-3/2} \leqslant C \| \psi(0) \|_{N_0}(1 + \| V \|_{N_0,h,0})^{N_0-2} . \tag{120}$$

Nous revenons à l'estimation (116) en écrivant pour $N = N_0 - 7$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k \leqslant N_0-8} \| \, | \Omega_{N-k}V(s) | \cdot | \Omega_k\psi(s) | \, \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} &\leqslant \\ &\leqslant C(1+s)^{-3/2+\varepsilon} \| V \|_{N_0,h,0} | \psi |_{N_0-8,(N_0-2)(h+1),-3/2}, \quad 0 < \varepsilon < 1/2 \end{aligned}$$

(120) et (116) assurent donc que :

(121) $$\| \psi \|_{N_0-7,0,0} \leqslant C \| \psi(0) \|_{N_0}(1 + \| V \|_{N_0,h,0})^{N_0-1}.$$

Nous utilisons de nouveau (116) pour $N_0 - 6 \leqslant N \leqslant N_0$ en écrivant :

$$\sum_{k \leqslant N-1} \| \, | \Omega_{N-k} V(s) | \cdot | \Omega_k \psi(s) | \, \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} \leqslant C( \| V(s) \|_{N_0} | \psi(s) |_{N_0-8} + \\ + | V(s) |_7 \, \| \psi(s) \|_{N-1} .$$

L'estimation (12) permet d'estimer $| V(s) |_7$ si $N_0 \geqslant 10$. On obtient alors en tenant compte de (120) pour $N_0 - 6 \leqslant N \leqslant N_0$ :

$$\| \psi \|_{N,k+h+1,0} \leqslant C( \| \psi(0) \|_{N_0}(1 + \| V \|_{N_0,h,0})^{N_0-1} + \| V \|_{N_0,h,0} \| \psi \|_{N-1,k,0}) .$$

On pose $k = (N - N_0 + 6)(h + 1)$ et par récurrence finie sur $N \in [N_0 - 6, N_0]$, il vient :

(122) $$\| \psi \|_{N_0,7(h+1),0} \leqslant C \| \psi(0) \|_{N_0}(1 + \| V \|_{N_0,h,0})^{N_0+6}$$

(112) suivi de (120) et (121), et (122) donnent (113). Q.E.D.

*Preuve du théorème III.2.* — On prouve facilement l'existence de $W_-$ par la méthode de Cook : pour montrer que $U(0, -t)U_0(-t)\psi$ converge dans $(L^2(\mathbb{R}^3_x))^4$ quand $t \to \infty$, il suffit d'établir que :

(123) $$\left\| \frac{d}{dt} U(0, -t)U_0(-t)\psi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} \in L^1(\mathbb{R}_t) .$$

Or, on a :

$$\left\| \frac{d}{dt} U(0, -t)U_0(-t)\psi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} = \| U(0, -t)V(-t)U_0(-t)\psi \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} .$$

Si $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3_x, \mathbb{C}^4)$ on obtient :

$$\left\| \frac{d}{dt} U(0, -t)U_0(-t)\psi \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} \leqslant C(1+t)^{-3/2}(1 + \mathrm{Log}\,(1+t))^h \| V \|_{N_0,h,0}$$

ce qui implique (123). $W_-\psi$ existe donc sur un sous-espace dense de $(L^2(\mathbb{R}^3_x))^4$ et comme $\| W_-\psi \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} = \| \psi \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)}$, $W_-$ est en fait défini sur tout $(L^2(\mathbb{R}^3_x))^4$. Pour la même raison, il suffit d'établir l'existence de $W\psi$ pour $\psi$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R}^3_x, \mathbb{C}^4)$. Le théorème III.1 donne :

(124) $$| U(t, 0)\psi |_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x)} \leqslant C(1+t)^{-3/2}(1 + \mathrm{Log}\,(1+t))^{6h} .$$

Or on a :

$$U_0(-t)U(t, 0)\psi = \psi + \int_0^t U_0(-s)V(s)U(s, 0)\psi ds$$

et (124) et (12) donnent :

(125) $$\| U_0(-s)V(s)U(s, 0)\psi \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} \leqslant C(1+s)^{-3/2}(1 + \mathrm{Log}(1+s))^{7h}$$

ce qui assure l'existence de $W\psi$. Q.E.D.

## IV. INVARIANCE DE LORENTZ, COMPATIBILITÉ ET CONDITION NULLE

Pour obtenir une solution globale d'un système de Friedrichs semi-linéaire $Lu = f(u)$, $f(u) = 0(|u|^d)$, comme perturbation de la solution nulle, on est amené à établir une estimation du type :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| f(u(t)) \|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)} dt < \infty .$$

Or la solution libre $u_0$ d'un système hyperbolique homogène du premier ordre $Lu_0 = 0$, décroît uniformément comme $|t|^{-(n-1)/2}$ et ainsi $\| f(u_0(t)) \|_{L^2(\mathbb{R}^n_x)} = 0(|t|^{-(n-1)(d-1)/2})$. Le cas $n = 3$, $d = 2$ est donc critique et les systèmes hyperboliques en dimension 3 d'espace et avec des non-linéarités quadratiques présentent souvent des propriétés d'explosion [*11*]; aussi est-il intéressant de distinguer les interactions bilinéaires $f$ pour lesquelles $\| f(u_0(t)) \|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)}$ soit intégrable. Une condition suffisante est que $f$ s'annule sur le noyau du symbole de L : c'est la notion de compatibilité introduite par B. Hanouzet et J.-L. Joly [*10*] (voir aussi [*2*]) et, pour l'équation des ondes, la condition nulle de S. Klainerman [*16*]; c'est ici la motivation de l'hypothèse (H3).

Dans cette partie nous étudions les rapports entre l'invariance de Lorentz d'une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}^4$, la compatibilité avec le système de Dirac, et la condition nulle. Nous distinguons le cas du système de Dirac sans masse :

(126) $$\mathscr{L}_0 = - i\gamma^\mu \partial_\mu$$

et celui du système massif :

(127) $$\mathscr{L}_M = - i\gamma^\mu \partial_\mu + M, \qquad M \neq 0 .$$

Nous rappelons quelques définitions :

*i*) Une forme sesquilinéaire $f$ sur $\mathbb{C}^N$ est dite compatible avec un système différentiel du premier ordre sur $\mathbb{R}^n_x$

$$A(\partial) = \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial}{\partial x^j} + iB$$

où $A_j$ et B sont des matrices $P \times N$ à coefficients constants, si

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad V \in \operatorname{Ker}\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j A_j + B\right) \Rightarrow f(V, V) = 0 .$$

*ii*) Une application sesquilinéaire $N(\psi'_1, \psi'_2)$ sur $\mathbb{C}^{16} \times \mathbb{C}^{16}$ satisfait la condition nulle, si pour tout $\psi_i \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$, ${}^t\psi_i = (\psi_i^1, \psi_i^2, \psi_i^3, \psi_i^4)$, $\psi'_i = (\partial_\mu \psi_i)_{0 \leqslant \mu \leqslant 3}$ on a :

$$(129) \quad \forall X = (X_\mu) \in \mathbb{R}^4,\ g^{\mu,\nu} X_\mu X_\nu = 0 \Rightarrow \forall h, k, \sum_{0 \leqslant \mu, \nu \leqslant 3} \frac{\partial^2 N}{\partial(\partial_\mu \tilde{\psi}_1^h)\partial(\partial_\nu \psi_2^k)} X_\mu X_\nu = 0.$$

*iii*) La représentation spinorielle du groupe complet de Lorentz $0(3, 1)$ est l'application bivalente qui, à une transformation de Lorentz $L = (L^\mu_\nu) \in 0(3, 1)$, associe $\pm\ \Lambda \in SL(4, \mathbb{C})$ défini par :

$$(130) \qquad L^\mu_\nu \gamma^\nu = \Lambda^{-1} \gamma^\mu \Lambda .$$

Enfin, on note $D0(3, 1)$ le sous-groupe orthochrone propre de Lorentz.

THÉORÈME IV.1. — *Soit $f$ une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}^4$; les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *$f$ est invariante sous l'action de la représentation spinorielle du sous-groupe orthochrone propre de Lorentz :*

$$(131) \qquad \forall \psi_i \in \mathbb{C}^4, \qquad \forall L \in D0(3, 1), \qquad f(\Lambda\psi_1, \Lambda\psi_2) = f(\psi_1, \psi_2);$$

2) *$f$ est compatible avec le système de Dirac sans masse $\mathscr{L}_0$ :*

$$(132) \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \qquad V \in \mathrm{Ker}\,(\xi_\mu \gamma^\mu) \Rightarrow f(V, V) = 0;$$

3) *la forme $N(\psi'_1, \psi'_2) = f(\mathscr{L}_0\psi_1, \mathscr{L}_0\psi_2)$, $\psi_i \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ satisfait la condition nulle (129);*

4) *il existe $C > 0$, tel que, pour tout $\psi_i \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ on ait :*

$$(133) \quad |f(\mathscr{L}_0\psi_1, \mathscr{L}_0\psi_2)(t, x)| \leqslant \\ \leqslant C(1 + |t| + |x|)^{-1} \sup_{0 \leqslant \sigma, \tau \leqslant 10} |\Gamma_\sigma \psi_1(t, x)|\, |\Gamma_\tau \psi_2(t, x)|$$

*où* $\qquad \Gamma_0 = x^\mu \partial_\mu \qquad$ *et* $\qquad t = x^0, \qquad x = (x^1, x^2, x^3);$

5) *il existe des complexes $\alpha$ et $\beta$ tels que :*

$$(134) \qquad \forall \psi_i \in \mathbb{C}^4, \qquad f(\psi_1, \psi_2) = \tilde{\psi}_1(\alpha\gamma^0 + \beta\gamma^0\gamma^5)\psi_2 .$$

Remarquons que dans l'estimation (133) intervient l'opérateur de radiation $\Gamma_0 = x^\mu \partial_\mu$ qui vérifie :

$$[\mathscr{L}_0, \Gamma_0] = \mathscr{L}_0, \qquad [\mathscr{L}_M, \Gamma_0] = \mathscr{L}_0 ;$$

il est clair qu'on ne peut utiliser cet opérateur dans le cas de champs massifs. Si la masse n'est pas nulle, l'espace des formes compatibles est de dimension 1 et on n'a pas besoin de $\Gamma_0$.

THÉORÈME IV.2. — *Soit $f$ une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}^4$; les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *pour tout* $\psi_i$ *dans* $\mathbb{C}^4$ *et tout* L *dans* 0(3, 1), *on a* :

$$f(\Lambda\psi_1,\Lambda\psi_2) = (\det \mathrm{L}) f(\psi_1, \psi_2)\,; \tag{135}$$

2) $f$ *est compatible avec le systeme de Dirac* $\mathscr{L}_{\mathrm{M}}$, $\mathrm{M} \neq 0$ :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}, \qquad \mathrm{V} \in \mathrm{Ker}\,(\xi_\mu \gamma^\mu + \mathrm{M}\,\mathrm{I}d) \Rightarrow f(\mathrm{V}, \mathrm{V}) = 0\,; \tag{136}$$

3) *la forme* $\mathrm{N}(\psi_1', \psi_2') = f(\mathscr{L}_0\psi_1, \mathscr{L}_0\psi_2) + g^{\mu,\nu} f(\partial_\mu\psi_1, \partial_\nu\psi_2)$ *satisfait la condition nulle (129) et il existe* $\mathrm{C} > 0$ *tel que pour tout* $\psi_i \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{C}^4)$ *on ait* :

$$\begin{aligned} &| \mathrm{N}(\psi_1', \psi_2')(t, x) | \leqslant \\ &\qquad \leqslant \mathrm{C}(1 + |t| + |x|)^{-1} \sup_{1 \leqslant \sigma, \tau \leqslant 10} | \Gamma_\sigma \psi_1(t, x) | \, | \Gamma_\tau \psi_2(t, x) |\,; \end{aligned} \tag{137}$$

4) *la matrice de* $f$ *est proportionnelle à* $\gamma^0\gamma^5$ *(hypothèse* H3*).*

Le point crucial est que l'opérateur de radiation $\Gamma_0$ n'apparaît pas dans l'estimation (137).

*Preuve du théorème IV.1.* — On associe à la forme sesquilinéaire $f$, la matrice $\mathrm{Q} \in \mathscr{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ définie par :

$$f(\psi_1, \psi_2) = \tilde{\psi}_1 \gamma^0 \mathrm{Q} \psi_2 = \overline{\psi}_1 \mathrm{Q} \psi_2\,. \tag{138}$$

La représentation spinorielle $\mathrm{L} \to \pm \Lambda$ vérifie :

$$\gamma^0 \tilde{\Lambda} \gamma^0 = \Lambda^{-1}\,. \tag{139}$$

On en déduit que l'invariance (131) est équivalente à :

$$\forall \mathrm{L} \in \mathrm{D}(3, 1), \qquad \Lambda^{-1} \mathrm{Q} \Lambda = \mathrm{Q}\,. \tag{140}$$

On sait que l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$ est engendré par les 16 matrices : $\mathrm{I}d$, $\gamma^\mu$, $\gamma^5$, $\mathrm{D}^\mu = \gamma^\mu\gamma^5$, $\sigma^{\mu,\nu} = i\gamma^\mu\gamma^\nu$, $0 \leqslant \mu < \nu \leqslant 3$, et que l'on a les relations :

$$\begin{aligned} &\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = \mathrm{L}^\mu_\nu \gamma^\nu, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant 3 \\ &\Lambda^{-1}\sigma^{\mu,\nu}\Lambda = 2 \sum_{\mu' < \nu'} \mathrm{L}^\mu_{\mu'} \mathrm{L}^\nu_{\nu'} \sigma^{\mu',\nu'}, \qquad 0 \leqslant \mu < \nu \leqslant 3 \end{aligned} \tag{141}$$

et

$$\begin{aligned} &\Lambda^{-1}\mathrm{D}^\mu\Lambda = \det(\mathrm{L}) \mathrm{L}^\mu_\nu \mathrm{D}^\nu, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant 3 \\ &\Lambda^{-1}\gamma^5\Lambda = \det(\mathrm{L})\gamma^5\,. \end{aligned} \tag{142}$$

On en conclut que (140) est vérifiée si et seulement si $\mathrm{Q} = \alpha \mathrm{I}d + \beta\gamma^5$ et donc (131) est équivalent à (134). D'autre part, il a été établi dans [*10*] que les formes compatibles avec $\mathscr{L}_0$ sont de la forme (134) ; il reste donc à prouver les implications (132) $\Rightarrow$ (129) $\Rightarrow$ (133) $\Rightarrow$ (132). Remarquons que si $\mathrm{N}(\psi_1', \psi_2')$ est donnée par :

$$\mathrm{N}(\psi_1', \psi_2') = f(\mathscr{L}_0\psi_1, \mathscr{L}_0\psi_2)$$

on a :

$$\sum_{0 \leqslant \mu, \nu \leqslant 3} \frac{\partial^2 N}{\partial(\partial_\mu \tilde{\psi}_1^h)\partial(\partial_\nu \psi_2^k)} X_\mu X_\nu = f(X_\mu \gamma_h^\mu, X_\nu \gamma_k^\nu) \tag{143}$$

où $\gamma_h^\mu$ est le vecteur colonne $h$-ième de $\gamma^\mu$.

On suppose que $f$ est compatible avec $\mathscr{L}_0$, donc pour établir (129) il suffit de montrer que pour tout $h$, le vecteur $X_\mu \gamma_h^\mu$ est dans le noyau de $\xi_\mu \gamma^\mu$ pour un covecteur $\xi$ convenable, i. e. :

$$X_\mu \xi_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = 0\,. \tag{144}$$

On choisit $X_\mu = \xi_\mu$ et (144) est une conséquence de (3) et de l'hypothèse $g^{\mu,\nu} X_\mu X_\nu = 0$. Ainsi (132) entraîne (129) et on sait que (133) est une conséquence de la condition nulle [*16*].

A présent, supposons que (133) soit vérifié et considérons un vecteur $V \in \operatorname{Ker}(\xi_\mu \gamma^\mu)$, $\xi \neq 0$. Les relations (3) impliquent :

$$(\xi_\mu \gamma^\mu)(\xi_\nu \gamma^\nu) = g^{\mu,\nu} \xi_\mu \xi_\nu \mathrm{I}d\,; \tag{145}$$

donc $\operatorname{Ker}(\xi_\mu \gamma^\mu)$ est non trivial si et seulement si :

$$g^{\mu,\nu} \xi_\mu \xi_\nu = 0, \qquad \xi_0 \neq 0 \tag{146}$$

et on a alors

$$\operatorname{Ker}(\xi_\mu \gamma^\mu) = \operatorname{Im}(\xi_\mu \gamma^\mu)\,. \tag{147}$$

Soit W tel que $V = \xi_\mu \gamma^\mu W$ ; on pose :

$$\psi(x^\mu) = e^{ix^\mu \xi_\mu} W.$$

On a donc

$$\mathscr{L}_0 \psi(x^\mu) = e^{ix^\mu \xi_\mu} V$$

et

$$N(\psi', \psi')(x^\mu)) = f(V, V)\,. \tag{148}$$

$\Gamma_\sigma \psi(x^\mu)$ est de la forme $i\xi_\mu e^{ix^\mu \xi_\mu} V$, $i(x_\nu \xi_\mu - x_\mu \xi_\nu) e^{ix^\mu \xi_\mu} V$, $ix^\mu \xi_\mu e^{ix^\nu \xi_\nu} V$. On choisit $x^\mu = \lambda \xi^\mu$, $\lambda > 0$. (146) entraîne alors que $x^\mu \xi_\mu = 0$ et on déduit de (148) et (133) que :

$$|\, f(V, V) \,| \leqslant C(1 + \lambda \,|\, \xi_0 \,|)^{-1} \,|\, V \,|\, \sup_\mu |\, \xi_\mu \,|\,.$$

En faisant tendre $\lambda$ vers l'infini on obtient (132). Q.E.D.

*Preuve du théorème IV.2.* — Avec la notation (138), l'invariance (135) est équivalente à :

$$\forall L \in 0(3, 1), \qquad \Lambda^{-1} Q \Lambda = \det(L) Q\,. \tag{149}$$

Les relations (141) et (142) imposent à Q d'être proportionnelle à $\gamma^5$ et ainsi les assertions 1) et 4) du théorème IV.2 sont équivalentes. A présent on remarque que (3) entraîne :

$$(\xi_\mu \gamma^\mu + \mathrm{M})(\xi_\mu \gamma^\mu - \mathrm{M}) = g^{\mu,\nu}\xi_\mu \xi_\nu - \mathrm{M}^2 .$$

Ker $(\xi_\mu \gamma^\mu + \mathrm{M})$ est donc non trivial si et seulement si :

$$g^{\mu,\nu}\xi_\mu \xi_\nu - \mathrm{M}^2 = 0 \tag{150}$$

et on a alors

$$\mathrm{Ker}\,(\xi_\mu \gamma^\mu + \mathrm{M}) = \mathrm{Im}\,(\xi_\mu \gamma^\mu - \mathrm{M}) .$$

Si $f$ est compatible avec $\mathscr{L}_\mathrm{M}$, on a donc, pour tout $\xi$ vérifiant (150) et tout X :

$$\xi_\mu \xi_\nu f(\gamma^\mu \mathrm{X}, \gamma^\nu \mathrm{X}) - \mathrm{M}\xi_\mu [f(\gamma^\mu \mathrm{X}, \mathrm{X}) + f(\mathrm{X}, \gamma^\mu \mathrm{X})] + \mathrm{M}^2 f(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = 0 . \tag{151}$$

$-\ \xi$ vérifiant aussi (150), on obtient :

$$\xi_\mu [f(\gamma^\mu \mathrm{X}, \mathrm{X}) + f(\mathrm{X}, \gamma^\mu \mathrm{X})] = 0 . \tag{152}$$

En considérant successivement $\xi_0 = \mathrm{M}$, $\xi_0^2 - \xi_j^2 = \mathrm{M}^2$, il vient :

$$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{C}^4, \quad f(\gamma^\mu \mathrm{X}, \mathrm{X}) + f(\mathrm{X}, \gamma^\mu \mathrm{X}) = 0, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant 3 \tag{153}$$

et donc

$$f(\gamma^\mu, \mathrm{I}) + f(\mathrm{I}, \gamma^\mu) = 0, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant 3 . \tag{154}$$

En décomposant la matrice de $f$ sur la base $\{ \mathrm{I}, \gamma^\mu, \gamma^5, \mathrm{D}^\mu, \sigma^{\mu,\nu} \}$ on montre aisément que $f$ satisfait (154) si et seulement si sa matrice est proportionnelle à $\mathrm{D}^0 = \gamma^0\gamma^5$ ; ainsi les assertions 2) et 4) du théorème IV.2 sont équivalentes. Supposons à présent que :

$$f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \tilde{\mathrm{X}}\gamma^0\gamma^5 \mathrm{Y} .$$

On écrit :

$$\begin{aligned} \mathrm{N}(\psi_1', \psi_2') &= f(\mathscr{L}_0 \psi_1, \mathscr{L}_0 \psi_2) + g^{\mu,\nu} f(\partial_\mu \psi_1, \partial_\nu \psi_2) \\ &= \sum_{0 \leqslant \mu < \nu \leqslant 3} \partial_\mu \tilde{\psi}_1 \tilde{\gamma}^\mu \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\nu \partial_\nu \psi_2 + \partial_\nu \tilde{\psi}_1 \tilde{\gamma}^\nu \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi_2 \\ &\quad + \sum_{0 \leqslant \mu \leqslant 3} \partial_\mu \tilde{\psi}_1 (\tilde{\gamma}^\mu \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu + g^{\mu,\nu} \gamma^0 \gamma^5) \partial_\mu \psi_2 . \end{aligned}$$

Les relations (3) impliquent que :

$$\begin{aligned} &\tilde{\gamma}^\mu \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\nu = -\ \tilde{\gamma}^\nu \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu, \qquad \mu \neq \nu \\ &\tilde{\gamma}^\mu \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\mu + g^{\mu,\mu} \gamma^0 \gamma^5 = 0, \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant 3 . \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\mathrm{N}(\psi_1', \psi_2') = \sum_{0 \leqslant \mu < \nu \leqslant 3} \mathrm{Q}_{\mu,\nu}(\psi_1', \psi_2') \tag{155}$$

où

$$Q_{\mu,\nu}(\psi'_1, \psi'_2) = \partial_\mu \tilde{\psi}_1 \tilde{\gamma}^\mu \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\nu \partial_\nu \psi_2 - \partial_\nu \tilde{\psi}_1 \tilde{\gamma}^\mu \gamma^0 \gamma^5 \gamma^\nu \partial_\nu \psi_2 .$$

D'après [*16*], les formes $Q_{\mu,\nu}$ satisfont la condition nulle (129) et l'estimation (137) ; il en est donc de même pour $N(\psi'_1, \psi'_2)$.

Considérons maintenant un vecteur $V \in \operatorname{Ker}(\xi_\mu \gamma^\mu + M)$ pour $\xi$ vérifiant (150) ; on pose :

$$\psi(x^\mu) = e^{ix^\mu \xi_\mu} V .$$

On a :

$$\mathscr{L}_0 \psi(x^\mu) = e^{ix^\mu \xi_\mu} (\xi_\nu \gamma^\nu V) = - M e^{ix^\mu \xi_\mu} V ,$$

$$f(\mathscr{L}_0 \psi, \mathscr{L}_0 \psi)(x^\mu) = M^2 f(V, V) ,$$

$$g^{\mu,\nu} f(\partial_\mu \psi, \partial_\nu \psi) = g^{\mu,\nu} \xi_\mu \xi_\nu f(V, V) = M^2 f(V, V) .$$

On en déduit que :

$$N(\psi', \psi')(x^\mu) = 2M^2 f(V,V) . \tag{156}$$

$\Gamma_\sigma \psi$, $1 \leqslant \sigma \leqslant 10$, est de la forme $i\xi_\mu e^{ix^\nu \xi_\nu} V$, $i(x_\mu \xi_\nu - x_\nu \xi_\mu) e^{ix^\alpha \xi_\alpha} V$. On choisit $x_\mu = \lambda \xi_\mu$, $0 < \lambda$ ; (137) et (156) entraînent que :

$$| f(V, V) | \leqslant C(1 + \lambda | \xi |)^{-1} .$$

Comme $\xi$ n'est pas nul par (150), on conclut en faisant tendre $\lambda$ vers l'infini que $f(V, V)$ est nul, ce qui achève la preuve du théorème IV.2.

## V. PROBLÈME DE CAUCHY SOUS LES HYPOTHÈSES (H1) ET (H3)

Les équations de la théorie relativiste des champs sont équivalentes à des systèmes d'équations d'ondes couplées quadratiquement. Ainsi que nous l'avons remarqué dans l'introduction, la présence de champs sans masse rend leur étude difficile du fait que leurs normes $L^\infty(\mathbb{R}^3_x)$ décroissant comme $t^{-1}$ ne sont pas intégrables. De plus, l'énergie associée au système de Dirac n'est pas définie positive et on ne dispose pas de loi de conservation assurant une estimation *a priori* des dérivées des spineurs. Cependant, ces systèmes possèdent des propriétés d'invariance sous l'action de groupes de transformations, sur les variables, symétries externes, ou sur les champs, symétries internes ou « de Jauge ». Ainsi, l'invariance par le groupe conforme 0(4, 2) est utilisé dans [*5*] et l'invariance de Jauge SU($n$) a permis de résoudre le problème de Cauchy pour les équations de Yang-Mills [*9*]. Ici, l'invariance par le groupe de Lorentz assurée par l'hypothèse (H3), permet d'obtenir des solutions globales de Cauchy :

Nous considérons donc le problème de Cauchy :

(157) $$-i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + M\psi = \varphi V\psi, \qquad M \neq 0, \qquad \tilde{V}\gamma^0 = \gamma^0 V,$$

(158) $$\Box\varphi = ig\tilde{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi, \qquad g \in \mathbb{R},$$

(159) $$\psi(0,x) = \varepsilon\psi_0(x), \qquad \varphi(0,x) = \varepsilon\varphi_0(x), \qquad \partial_t\varphi(0,x) = \varepsilon\varphi_1(x),$$

(160) $$\psi_0 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3_x, \mathbb{C}^4), \qquad \varphi_0, \quad \varphi_1 \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^3_x, \mathbb{R}), \qquad 0 < \varepsilon.$$

THÉORÈME V.1. — *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ ne dépendant que des dérivées des données initiales $\psi_0, \varphi_0, \varphi_1$ jusqu'à l'ordre 16, tel que, pour tout $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ le problème de Cauchy (157) à (160) admet une unique solution $(\psi, \varphi)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^4)$.*

Ce résultat se généralise au cas de systèmes d'équations de Dirac et des ondes convenablement couplées (voir [*1*]).

*Exemple.* — (Modèle pseudoscalaire de Yukawa des forces nucléaires). L'interaction entre le proton et le neutron, transmise par trois pions, est décrite par le lagrangien d'interaction :

$$\mathscr{L}_{\text{int}} = ig\{(\overline{\psi}_p\gamma^5\psi_n + \overline{\psi}_n\gamma^5\psi_p)\varphi_1 - i(\overline{\psi}_p\gamma^5\psi_n - \overline{\psi}_n\gamma^5\psi_p)\varphi_2 + \\ + (\overline{\psi}_p\gamma^5\psi_p - \overline{\psi}_n\gamma^5\psi_n)\varphi_3\}, \qquad \overline{\psi} = \tilde{\psi}\gamma^0.$$

Les estimations de la solution assurent en particulier que

$$\sup_t \|\varphi(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3_x)} < \infty, \qquad |\psi(t)|_{L^\infty(\mathbb{R}^3_x)} = O(|t|^{-3/2});$$

ainsi l'énergie des seconds membres de (157) et (158) est $t$-intégrable et la solution est asymptotiquement libre.

THÉORÈME V.2. — *Sous les hypothèses du théorème V.1, il existe $\psi^\pm$ et $\varphi^\pm$ vérifiant :*

$$\psi^\pm \in C^0(\mathbb{R}_t, H^8(\mathbb{R}^3_x)), \qquad -i\gamma^\mu\partial_\mu\psi^\pm + M\psi^\pm = 0$$
$$\varphi^\pm \in C^0(\mathbb{R}_t, H^{16}(\mathbb{R}^3_x)) \cap C^1(\mathbb{R}_t, H^{15}(\mathbb{R}^3_x)), \qquad \Box\varphi^\pm = 0$$
$$\lim_{t\to\pm\infty}(\|\psi(t) - \psi^\pm(t)\|_{H^8(\mathbb{R}^3_x)} + \|\varphi(t) - \varphi^\pm(t)\|_{H^{16}(\mathbb{R}^3_x)} + \\ + \|\partial_t\varphi(t) - \partial_t\varphi^\pm(t)\|_{H^{15}(\mathbb{R}^3_x)}) = 0.$$

*Preuve du théorème V.1.* — Pour $N_0 \geqslant 8$, on introduit la norme :

(161) $$\left\{\begin{aligned} &[\psi] = \|\psi\|_{N_0,7,0} + \|\psi\|_{N_0-7,0,0} + |\psi|_{N_0-8,N_0-2,-3/2} + \\ &\quad + \sup_{0\leqslant t}\{(1+\operatorname{Log}(1+t))^{-7}(1+t)\|\mathscr{L}_M\psi(t)\|_{N_0} + \\ &\quad + (1+\operatorname{Log}(1+t))^{-N_0+2}(1+t)^{5/2}|\mathscr{L}_M\psi(t)|_{N_0-8}\}. \end{aligned}\right.$$

On définit la suite $(\psi^n, \varphi^n)$ en posant pour $n \geqslant 0$ :

(162) $$-i\gamma^\mu\partial_\mu\psi^n + M\psi^n = \varphi^{n-1}V\psi^n$$

(163) $$\Box\varphi^n = ig\tilde{\psi}^{n-1}\gamma^0\gamma^5\psi^{n-1}$$

(164) $$\psi^n(0,x) = \varepsilon\psi_0(x), \qquad \varphi^n(0,x) = \varepsilon\varphi_0(x), \qquad \partial_t\varphi^n(0,x) = \varepsilon\varphi_1(x)$$

et

(165) $$\psi^{-1} \equiv 0, \qquad \varphi^{-1} \equiv 0.$$

Le théorème III.1 assure que pour $N_0 \geqslant 10$, il existe $C > 0$ ne dépendant que de $N_0$, tel que :

$$\| \psi^n \|_{N_0,7,0} + \| \psi^n \|_{N_0-7,0,0} + | \psi^n |_{N_0-8,N_0-2,-3/2} \leqslant \leqslant C\varepsilon(1 + \| \varphi^{n-1} \|_{N_0,0,0})^{N_0+6}.$$

D'autre part, on a :

$$\| (\varphi^{n-1}V\psi^n)(t) \|_{N_0} \leqslant C(1+t)^{-1} \| \varphi^{n-1} \|_{N_0,0,0} \| \psi^n \|_{N_0,7,0}(1+\mathrm{Log}\,(1+t))^7 + C \| \varphi^{n-1} \|_{N_0,0,0}(1+\mathrm{Log}\,(1+t))^{N_0-2}(1+t)^{-3/2} | \psi |_{N_0-8,N_0-2,-3/2}$$

en appliquant de nouveau le théorème III.1, il vient :

(167) $$(1+\mathrm{Log}\,(1+t))^{-7}(1+t) \| \mathscr{L}_M\psi^n(t) \|_{N_0} \leqslant C\varepsilon(1+ \| \varphi^{n-1} \|_{N_0,0,0})^{N_0+7}.$$

Enfin, on a :

$$| (\varphi^{n-1}V\psi^n)(t) |_{N_0-8} \leqslant C(1+\mathrm{Log}\,(1+t))^{N_0-2}(1+t)^{-5/2} \times \times \| \varphi^{n-1} \|_{N_0,0,0} | \psi^n |_{N_0-8,N_0-2,-3/2}$$

et le théorème III.1 donne encore :

(168) $$(1 + \mathrm{Log}\,(1 + t))^{-N_0+2}(1 + t)^{5/2} | \mathscr{L}_M\psi^n(t) |_{N_0-8} \leqslant \leqslant C\varepsilon(1+ \| \varphi^{n-1} \|_{N_0,0,0})^{N_0+7}.$$

On conclut de (166) (167) (168) que l'on a :

(169) $$[\psi^n] \leqslant C\varepsilon(1+ \| \varphi^{n-1} \|_{N_0,0,0})^{N_0+7}.$$

PROPOSITION V.1. — *Soit $\varphi$ une solution de*

(170) $$\square\varphi = g\tilde{\psi}_1\gamma^0\gamma^5\psi_2, \qquad g \in \mathbb{C},$$

*de support inclus dans* $\{ (t, x); | x | \leqslant | t | + R \}$. *Il existe une constante* $C > 0$ *ne dépendant que de* $N_0 \geqslant 16$ *et* R, *telle que* :

(171) $$\| \varphi \|_{N_0,0,0} \leqslant C( \| \varphi(0) \|_{N_0} + [\psi_1] \cdot [\psi_2]).$$

Admettant cette proposition, nous achevons la preuve du théorème V.1. On déduit de (171) que si $N_0 \geqslant 16$ :

(172) $$\| \varphi^n \|_{N_0,0,0} \leqslant C(\varepsilon + [\psi^{n-1}]^2).$$

On choisit $N_0 = 16$ dans (161) et (169) et on obtient :

(173) $$[\psi^n] \leqslant C\varepsilon(1+ \| \varphi^{n-1} \|_{16,0,0})^{23},$$

(174) $$\| \varphi^n \|_{16,0,0} \leqslant C(\varepsilon + [\psi^{n-1}]^2).$$

On choisit $\varepsilon$ assez petit pour que

(175) $$(1 + 2C\varepsilon)^{23} \leqslant 2, \qquad 4C^2\varepsilon \leqslant 1.$$

On suppose que :

$$\| \varphi^{n-1} \|_{16,0,0} \leqslant 2C\varepsilon, \qquad [\psi^{n-1}] \leqslant 2C\varepsilon \; ; \tag{176}$$

alors (173) (174) (175) impliquent que

$$\| \varphi^{n} \|_{16,0,0} \leqslant 2C\varepsilon, \qquad [\psi^{n}] \leqslant 2C\varepsilon \; ; \tag{177}$$

compte tenu de (165) on conclut que si $\varepsilon$ satisfait (17), $\varphi^n$ et $\psi^n$ vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad [\psi^n] + \| \varphi^n \|_{16,0,0} \leqslant 4C\varepsilon \tag{178}$$

et en particulier $\psi^n$ est une suite bornée de $C^0(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^3_x))$ ce qui permet d'appliquer le lemme II.3 et cela achève la preuve du théorème V.1.

*Preuve de la proposition V.1.* — On note $f(\psi_1, \psi_2) = g\tilde{\psi}_1\gamma^0\gamma^5\psi_2$. On remarque que $\psi = M^{-1}(\mathscr{L}_M\psi - \mathscr{L}_0\psi)$ et on vérifie que :

$$f(\psi_1, \psi_2) = (2M)^{-2}[f(\mathscr{L}_0^2\psi_1, \psi_2) + 2f(\mathscr{L}_0\psi_1, \mathscr{L}_0\psi_2) + f(\psi_1, \mathscr{L}_0^2\psi_2)] + \mathscr{R} \tag{179}$$

où

$$\mathscr{R} = (2M)^{-1}[f(\mathscr{L}_M\psi_1, \psi_2) + f(\psi_1, \mathscr{L}_M\psi_2) - (2M)^{-2}[f(\mathscr{L}_0\mathscr{L}_M\psi_1, \psi_2) + f(\mathscr{L}_M\psi_1, \mathscr{L}_0\psi_2) + f(\mathscr{L}_0\psi_1, \mathscr{L}_M\psi_2) + f(\psi_1, \mathscr{L}_0\mathscr{L}_M\psi_2)]. \tag{180}$$

Les relations (3) entraînent que :

$$\mathscr{L}_0^2 = -\,\square\, \mathrm{I}d.$$

On en déduit que :

$$f(\mathscr{L}_0^2\psi_1, \psi_2) + 2f(\mathscr{L}_0\psi_1, \mathscr{L}_0\psi_2) + f(\psi_1, \mathscr{L}_0^2\psi_2) = -\,\square\, f(\psi_1, \psi_2) + 2[f(\mathscr{L}_0\psi_1, \mathscr{L}_0\psi_2) + g^{\mu,\nu}f(\partial_\mu\psi_1, \partial_\nu\psi_2)]. \tag{181}$$

On conclut par (179) et (181) que l'équation (170) est équivalente à :

$$\square(\varphi + (2M)^{-2}f(\psi_1, \psi_2)) = N(\psi_1', \psi_2') + \mathscr{R} \tag{182}$$

où $\mathscr{R}$ est donné par (180) et N est définie par :

$$N(\psi_1', \psi_2') = 2(2M)^{-2}[f(\mathscr{L}_0\psi_1, \mathscr{L}_0\psi_2) + g^{\mu,\nu}f(\partial_\mu\psi_1, \partial_\nu\psi_2)]. \tag{183}$$

L'estimation d'énergie pour l'équation des ondes de [*15*] assure que :

$$\begin{cases} \| \varphi(t) \|_{N_0} \leqslant C_R [\, \| \varphi(0) \|_{N_0} + \| f(\psi_1, \psi_2)(0) \|_{N_0} + \| f(\psi_1, \psi_2)(t) \|_{N_0} + \\ \qquad + \displaystyle\int_0^t (1+s)(\, \| N(\psi_1', \psi_2')(s) \|_{N_0-1} + \| \mathscr{R}(s) \|_{N_0-1})ds \Big]. \end{cases} \tag{184}$$

Tout d'abord on a :

$$\| f(\psi_1, \psi_2)(t) \|_{N_0} \leqslant C(\, \| \psi_1(t) \|_{N_0} \, | \psi_2(t) |_{[N_0/2]} + | \psi_1(t) |_{[N_0/2]} \, \| \psi_2(t) \|_{N_0})$$

et pour $N_0 \geqslant 16$, on a $[N_0/2] \leqslant N_0 - 8$ ; donc

$$\operatorname*{Sup}_{0 \leqslant t} \| f(\psi_1, \psi_2)(t) \|_{N_0} \leqslant C[\psi_1] \cdot [\psi_2]. \tag{185}$$

A présent l'hypothèse (H3) et le théorème IV.2 impliquent que $N(\psi'_1, \psi'_2)$ donnée par (183) satisfait la condition nulle et (155) ; or, si $\Omega_k$ est un opérateur différentiel du type (60) on a :

$$\Omega_k N(\psi'_1, \psi'_2) = \sum_{h \leqslant k} N_h(\Omega_h \psi'_1, \Omega_{k-h}\psi'_2) \tag{186}$$

où $N_h$ est encore une forme satisfaisant (155) ; on en déduit que :

$$\| N(\psi'_1, \psi'_2)(s) \|_{N_0-1} \leqslant C(1+s)^{-1}( \| \psi_1(s) \|_{N_0} | \psi_2(s) |_{[(N_0-1)/2]+1} + + | \psi_1(s) |_{[(N_0-1)/2]+1} \| \psi_2(s) \|_{N_0}). \tag{187}$$

En remarquant que si $N_0 \geqslant 16$, on a $[(N_0-1)/2]+1 \leqslant N_0 - 8$, on obtient :

$$\| N(\psi'_1, \psi'_2)(s) \|_{N_0-1} \leqslant C(1+s)^{-5/2}(1+\mathrm{Log}\,(1+s))^{N_0+5} [\psi_1][\psi_2]. \tag{188}$$

On estime directement $\| \mathscr{R}(s) \|_{N_0-1}$ :

$$\| \mathscr{R}(s) \|_{N_0-1} \leqslant C[ \| \mathscr{L}_M \psi_1(s) \|_{N_0} | \psi_2(s) |_{[(N_0-1)/2]+1} + + | \mathscr{L}_M \psi_1(s) |_{[(N_0-1)/2]+1} \| \psi_2(s) \|_{N_0} + \| \mathscr{L}_M \psi_2(s) \|_{N_0} | \psi_1(s) |_{[(N_0-1)/2]} + + | \mathscr{L}_M \psi_2(s) |_{[(N_0-1)/2]+1} \| \psi_1(s) \|_{N_0}$$

il vient alors :

$$\| \mathscr{R}(s) \|_{N_0-1} \leqslant C(1+s)^{-5/2}(1+\mathrm{Log}(1+s))^{N_0+5} [\psi_1] \cdot [\psi_2]. \tag{189}$$

Maintenant l'estimation (171) est une conséquence directe de (184) (185) (188) et (189). Q.E.D.

*Preuve du théorème V.2.* — On désigne respectivement par $U_0$ et $R_0$ les propagateurs associés à $-i\gamma^\mu \partial_\mu + M$ et $\square$ ; soient :

$$U_0(-t)\psi(t) = \varepsilon \psi_0 + \int_0^t U_0(-s)[\varphi(s) V \psi(s)] ds$$

$$R_0(-t)\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \partial_t \varphi(t) \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} + \int_0^t R_0(-s)\begin{pmatrix} 0 \\ ig\tilde{\psi}(s)\gamma^0\gamma^5\psi(s) \end{pmatrix} ds.$$

$U_0$ est un groupe unitaire sur $(H^8(\mathbb{R}^3_x))^4$ et il suffit de montrer que $\| \varphi(s) V \psi(s) \|_{H^8}$ est dans $L^1(\mathbb{R}_s)$ pour prouver que $\psi$ est asymptotiquement libre. Or, on a, avec $N_0 = 16$ :

$$(1+s)^{1/2}(1+\mathrm{Log}\,(1+s))^{14} \| \varphi(s) V \psi(s) \|_{H^8} \leqslant C \| \varphi \|_{16,0,0} [\psi] < +\infty$$

et il suffit de poser :

$$\psi^{\pm}(t) = U_0(t)(\varepsilon \psi_0) + \int_0^{\pm\infty} U_0(t-s)[\varphi(s) V \psi(s)] ds.$$

A présent on remarque que par (182) (188) et (189) $\varphi$ est solution de l'équation :

$$\square (\varphi + (2M)^{-2} ig\tilde{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi) = N(\psi', \psi') + \mathscr{R} \tag{190}$$

avec pour $N_0 = 16$

(191) $\| N(\psi', \psi')(s) \|_{H^{15}(\mathbb{R}^3_x)} \leqslant C(1+s)^{-5/2}(1+\mathrm{Log}(1+s))^{21} [\psi]^2$

et

(192) $\| \mathscr{R}(s) \|_{H^{15}(\mathbb{R}^3_x)} \leqslant C(1+s)^{-5/2}(1+\mathrm{Log}(1+s))^{21} [\psi]^2$.

On déduit de (190) que :

$$R_0(-t)\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \partial_t\varphi(t) \end{pmatrix} = \varepsilon\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} + (2M)^{-2} ig \begin{pmatrix} \tilde{\psi}(t')\gamma^0\gamma^5\psi(t') \\ \partial_t(\tilde{\psi}(t')\gamma^0\gamma^5\psi(t')) \end{pmatrix}_{t'=0}$$
$$- R_0(-t)\begin{pmatrix} (2M)^{-2} ig\tilde{\psi}(t)\gamma^0\gamma^5\psi(t) \\ (2M)^{-2} ig\partial_t(\tilde{\psi}(-t)\gamma^0\gamma^5\psi(t)) \end{pmatrix} + \int_0^t R_0(-s)\begin{pmatrix} 0 \\ N(\psi', \psi')(s) + \mathscr{R}(s) \end{pmatrix} ds.$$

On a les estimations :

(193) $\| \tilde{\psi}(t)\gamma^0\gamma^5\psi(t) \|_{H^{16}(\mathbb{R}^3_x)} \leqslant C(1+t)^{-3/2}(1+\mathrm{Log}(1+t))^{21} [\psi]^2$

(194) $\| \partial_t(\tilde{\psi}(t)\gamma^0\gamma^5\psi(t)) \|_{H^{16}(\mathbb{R}^3_x)} \leqslant C(1+t)^{-3/2}(1+\mathrm{Log}(1+t))^{21} [\psi]^2$.

Sachant que :

$$\| R_0(t) \|_{(H^{16}(\mathbb{R}^3_x) \times H^{15}(\mathbb{R}^3_x))} \leqslant C\,|\,t\,|$$

la convergence de $R_0(-t)(\varphi(t), \partial_t\varphi(t)$ est une conséquence de (191) (192) (193) (194). Q.E.D.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] A. BACHELOT, *Solutions globales pour les systèmes de Dirac-Klein-Gordon*. Journées équations aux dérivées partielles, St-Jean-de-Monts, 1987, et Publications de l'Université de Bordeaux I, n° 8703.

[2] A. BACHELOT, Equipartition de l'énergie pour les systèmes hyperboliques et formes compatibles. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique*, t. **46**, n° 1, 1987, p. 45-76.

[3] A. BACHELOT, Problème de Cauchy pour des systèmes hyperboliques semi-linéaires. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, t. **1**, n° 6, 1984, p. 453-478.

[4] A. BACHELOT, V. PETKOV, Existence des opérateurs d'ondes pour les systèmes hyperboliques avec un potentiel périodique en temps. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Physique Théorique*, t. **47**, 1987, p. 383-428.

[5] Y. CHOQUET-BRUHAT, Solutions globales des équations de Maxwell-Dirac-Klein-Gordon (masses nulles). *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **292**, 1981, p. 153-158.

[6] Y. CHOQUET-BRUHAT, D. CHRISTODOULOU, Existence of global solutions of the Yang-Mills, Higgs and spinor field equations in 3 + 1 dimensions. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série*, t. **14**, 1981, p. 481-500.

[7] D. CHRISTODOULOU, Global solutions of nonlinear hyperbolic equations for small initial data. *Comm. Pure and Appl. Math.*, t. **34**, 1986, p. 267-282.

[8] M. FLATO, J. SIMON, E. TAFLIN, On global solutions of the Maxwell-Dirac equations. *Comm. Math. Phys.*, t. **112**, 1987, p. 21-49.

[9] J. GINIBRE, *Le problème de Cauchy pour les équations de Yang-Mills*. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1981, 1982, exp. n° 13.

[10] B. HANOUZET, J.-L. JOLY, Applications bilinéaires compatibles avec un système hyperbolique. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **301**, n° 10, 1985, p. 491-494 et article in *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, t. **4**, n° 4, 1987, p. 357-376.

[11] B. HANOUZET, J.-L. JOLY, Explosion pour des problèmes hyperboliques semi-linéaires avec second membre non compatible. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **301**, n° 11, 1985, p. 581-584 et *Publications d'Analyse Appliquée de l'Université de Bordeaux I*, n° 8518.

[12] L. HÖRMANDER, *Remarks on the Klein-Gordon equation.* Journées « Équations aux dérivées partielles », St-Jean-de-Monts, 1987, conférence n° 1.

[13] A. INOUE, Wave and scattering operators for an evolving system $d/dt\text{-}i\mathrm{A}(t)$. *J. Math. Soc. Japan*, t. **26**, n° 4, 1974, p. 608-624.

[14] S. KLAINERMAN, Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation. *Comm. Pure and Appl. Math.*, t. **38**, 1985, p. 321-332.

[15] S. KLAINERMAN, Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein-Gordon equations in four space-time dimensions. *Comm. Pure and Appl. Math.*, t. **38**, 1985, p. 631-641.

[16] S. KLAINERMAN, The null condition and global existence to nonlinear wave equations. *Lectures in Appl. Math.*, t. **23**, 1986, p. 293-326.

*(Manuscrit reçu le 28 janvier 1988)*

*(Version révisée reçue le 3 mai 1988)*