DISVE Pôle Scolarité	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2012/2013** **Session 1 d'automne** **PARCOURS : Ingé. math.** **CODE UE : MA5022** **Epreuve : Intégration** **Date : 18 décembre 2012, Heure : 14h.-17h., Durée : 3h.** **Salle : Amphithéâtre Wegener, bâtiment A22** Epreuve de : **Mr. A. Bachelot** Documents : **Non autorisés.**	

Nota bene : il sera tenu grand compte de la clarté de la rédaction.

Exercice 1. On note $\mathcal{T}_0 := \{A \subset \mathbb{R};\ A \textit{ ou } \mathbb{R} \setminus A \textit{ est dénombrable}\}$.

1 Montrer que $\mathcal{T}_0$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{T}_1$ la tribu engendrée par la famille $\{\{x, x+1, x+2\},\ x \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{T}_2$ la tribu engendrée par la famille des parties finies de $\mathbb{R}$.

2 Montrer que $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

3 Est-ce que cette tribu coincide avec la tribu des Boréliens ?

Exercice 2. On considère une suite $(a_n)_{1 \leq n}$, $a_n > 0$, et pour $x \geq 0$ on pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{-a_k x}$.

1 Montrer que pour tout n, f_n est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, \infty[$.

2 Montrer que la suite f_n converge simplement vers une fonction borélienne f.

3 Montrer que f est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, \infty[$ si et seulement si $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k} < \infty$.

Exercice 3. Pour $x > 0$ on pose $f(x) = \dfrac{\sin x}{\log(1+x)}$.

1 Montrer que f est intégrable au sens de Lebesgue sur $]0, \pi]$.

2 Montrer que l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{\infty} f(x)dx$ existe.

3 Montrer que f n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $[\pi, \infty[$.

Exercice 4. Soit g une fonction Lebesgue mesurable sur $[0,1]$ à valeur dans $[0, \infty]$. Pour tout $t \geq 0$ on pose

$$f(t) := \int_{[0,1]} e^{-tg(x)} d\lambda(x).$$

1 Montrer que f est définie et continue sur $[0, \infty[$.

2 On suppose que g est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$. Montrer que $f \in C^1([0, \infty[)$.

3 Enoncer le lemme de Fatou. On suppose que f admet une dérivée à droite en zéro. En utilisant le lemme de Fatou et la suite de fonctions $g_n(x) = n\left(1 - e^{-\frac{g(x)}{n}}\right)$, montrer que g est intégrable au sens de Lebesgue sur $[0,1]$.

Exercice 5.

Soient $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\right\}$ et $a > 1$. En utilisant le changement de variable en coordonnées sphériques, calculer

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} d\lambda(x,y,z).$$