DISVE Pôle Scolarité	**ANNEE UNIVERSITAIRE 2011/2012** **Session 1 d'automne** **PARCOURS : Ingé. math.** **CODE UE : MA5022** **Epreuve : Intégration** **Date : 13 décembre 2011, Heure : 14h.-17h., Durée : 3h.** **Salle : Amphithéâtre Poincaré, bâtiment A22** Epreuve de : **Mr. A. Bachelot** Documents : **Non autorisés.**	

Nota bene : il sera tenu grand compte de la clarté de la rédaction.

Exercice 1. Etant donné un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$, on considère la famille

$$\mathcal{A} = \{A \subset X;\ \ A\ \ ou\ X \setminus A\ est\ \mu - négligeable\}\,.$$

1 Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.
2 On suppose que $\mu(X) > 0$. Pour $A \in \mathcal{A}$ on pose $\nu(A) = 0$ si A est μ-négligeable et $\nu(A) = \infty$ si $X \setminus A$ est μ-négligeable. Montrer que ν définit une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.
3 Décrire l'espace $L^1(X, \nu)$.

Exercice 2. Soit $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$.
1 Montrer que l'intégrale de Riemann généralisée $\displaystyle\int_\pi^\infty f(x)dx$ existe.
2 Montrer que f n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $[\pi, \infty[$.

Exercice 3. Montrer que la suite

$$\int_{[0,n]} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x \; d\lambda(x)$$

converge quand n tend vers l'infini. Calculer sa limite.

Exercice 4. Etant donné un espace mesuré $(X, \mathcal{T}, \mu)$, on considère une fonction positive $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ et on pose pour $t \geq 0$:

$$F(t) = \int_X \frac{f(x)}{1 + tf(x)}\, d\mu(x).$$

1 Montrer que F est bien définie et que $F \in C^0([0, \infty[) \cap C^1(]0, \infty[)$.
2 On suppose de plus que $f \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$. Montrer que $F \in C^1([0, \infty[)$.
3 On suppose que $F \in C^1([0, \infty[)$. Montrer que $f \in \mathcal{L}^2(X, \mu)$.

Exercice 5.
Soit $\Omega = \{(x, y, z);\ 0 < x,\ 0 < y,\ 0 < z,\ x + y + z < 1\}$. Calculer

$$\int_\Omega xyz(1 - x - y - z)\; dxdydz.$$

(On pourra poser $x + y + z = X$, $y + z = XY$, $z = XYZ$.)